Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023
Guía 6: *Cuerpo rígido.*

1. Considerar los siguientes incisos:

   q) Dado un punto O fijo al cuerpo, si $\boldsymbol{v}_O$ y $\boldsymbol{\Omega}$ son perpendiculares, mostrar que para cualquier otro punto O', también fijo al cuerpo, $\boldsymbol{v}_{O'}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ resultan perpendiculares.

   w) Mostrar que si $\boldsymbol{v}_O$ y $\boldsymbol{\Omega}$ son perpendiculares, entonces siempre es posible encontrar un punto O' cuya velocidad $\boldsymbol{v}_{O'}$ sea nula.

   e) Bajo las condiciones del ítem anterior, mostrar que todos los puntos ubicados sobre una recta que pasa por O' y es paralela a $\boldsymbol{\Omega}$ tienen velocidad nula.

   r) Mostrar que si $\boldsymbol{v}_O$ y $\boldsymbol{\Omega}$ no son perpendiculares, entonces puede encontrarse un punto O' fijo al cuerpo tal que $\boldsymbol{v}_{O'}$ y $\boldsymbol{\Omega}$ sean paralelos.

   t) Mostrar que si $\boldsymbol{v}_O$ es paralelo a $\boldsymbol{\Omega}$, entonces nunca puede encontrarse un punto O' fijo al cuerpo tal que $\boldsymbol{v}_{O'}$ sea nulo ni perpendicular a $\boldsymbol{\Omega}$.

   y) ¿En qué casos la energía cinética puede desacoplarse en un término de rotación más otro de traslación?

   i) Mostrar que los momentos principales de inercia satisfacen la siguiente relación: $I_1 + I_2 \geqslant I_3$ (y permutaciones).

   o) Mostrar que si un cuerpo tiene un eje de simetría, entonces el centro de masa está contenido en dicho eje y además es un eje principal de inercia.

   p) Mostrar que si un cuerpo tiene un plano de simetría, entonces tanto el centro de masa como dos de los ejes principales de inercia están contenidos en dicho plano, y el tercer eje es perpendicular.

   a) Mostrar que en un sistema colineal de partículas los momentos principales de inercia satisfacen que $I_1 = I_2$ y que $I_3 = 0$.

   s) Mostrar que si un cuerpo tiene un eje de simetría de orden mayor que 2, hay degeneración en el plano perpendicular al eje.

   d) Mostrar que cuando el tensor de inercia es totalmente degenerado, sus momentos principales de inercia son invariantes frente a cualquier rotación.

2. Calcular el tensor de inercia respecto del centro de masa para un triángulo recto, de catetos iguales de longitud a, homogéneo y de masa m. Hallar los ejes principales de inercia y expresar el tensor de inercia en dichos ejes.

3. Determinar los ejes principales de inercia y calcular el tensor de inercia respecto del centro de masa para los siguientes sistemas:

   a) Cono circular recto, homogéneo, de altura h, radio de la base r y masa m.

   b) Anillo homogéneo, plano, circular, de radios r_1 y r_2 y masa m.

4. Calcular el tensor de inercia respecto de su centro de masa para un cubo homogéneo de masa m y lado a, según los ejes que pasan por su centro de masa y son normales a sus caras. ¿Cuánto valen los momentos de inercia respecto de una terna de ejes ortogonales, que pasan por el centro de masa y uno de los cuales está orientado según la diagonal que une dos vértices opuestos?

5. Demostrar que para un cuerpo plano $I_3 = I_1 + I_2$, donde el eje 3 es perpendicular al plano del cuerpo.

6. Escribir la ecuación paramétrica de un círculo de radio a, centrado en el origen, tal que el versor $\hat{n}$ es normal al plano del círculo.

7. Mercurio da una vuelta alrededor del Sol en 87,9691 días. Mercurio rota sobre su eje una vez cada 58,646 días. Asumiendo que la órbita es circular y que el eje de rotación es perpendicular al plano de la órbita, ¿cuántos días mercuriales dura un año mercurial?

8. Mostrar que, en términos de los ángulos de Euler, los versores $\hat{e}_i$ del sistema de ejes fijos al cuerpo están dados por

$$
\begin{aligned}
\hat{e}_1 &= \cos\psi\ \hat{\rho}(\phi) + \sin\psi\ \hat{\psi}(\phi,\theta),\\
\hat{e}_2 &= -\sin\psi\ \hat{\rho}(\phi) + \cos\psi\ \hat{\psi}(\phi,\theta),\\
\hat{e}_3 &= \cos\theta\ \hat{z} - \sin\theta\ \hat{\phi}(\phi),
\end{aligned}
$$

donde

$$\hat{\psi}(\phi,\theta) = \cos\theta\ \hat{\phi}(\phi) + \sin\theta\ \hat{z}.$$

9. Mostrar que, en términos de los ángulos de Euler, las componentes de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{\rho}(\phi) + \dot{\psi}\,\hat{e}_3$ en el sistema de ejes fijos al cuerpo son

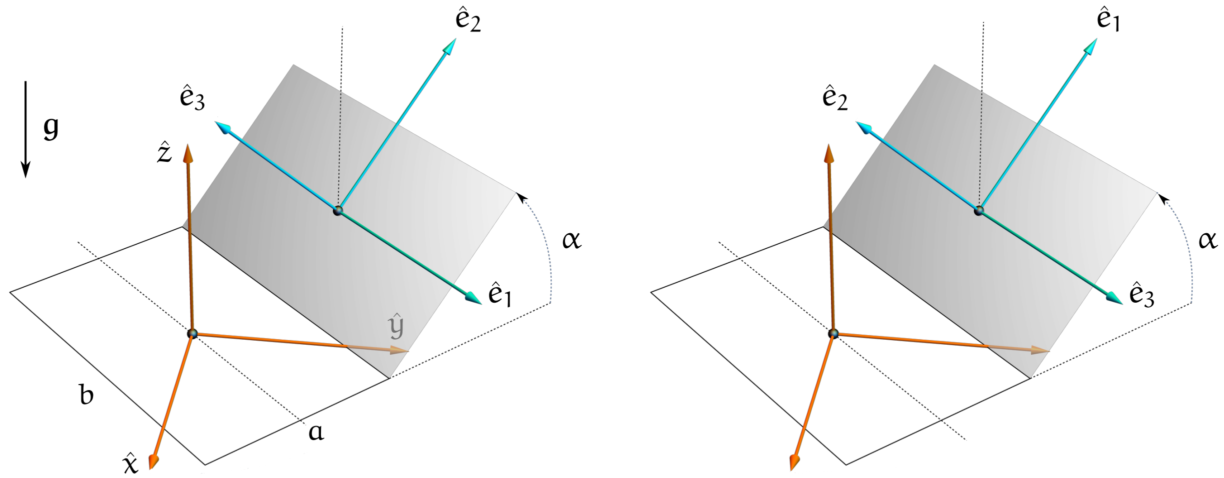
$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\psi\ \sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi,\\
\omega_2 &= \dot{\varphi}\cos\psi\ \sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi,\\
\omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta.
\end{aligned}
$$

10. Mostrar que, en términos de los ángulos de Euler, las componentes de la velocidad angular en el sistema de ejes fijos al espacio son

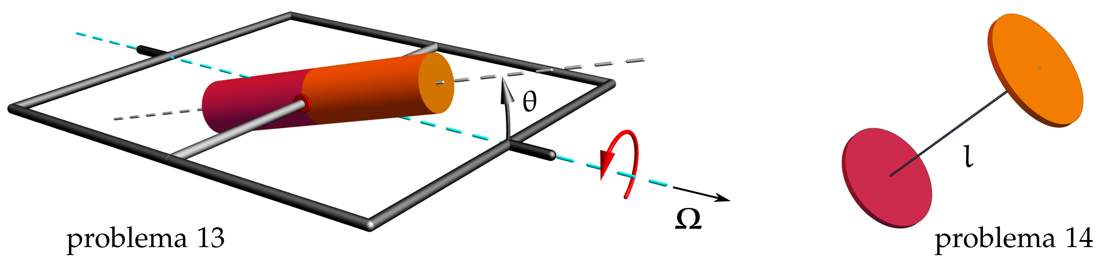
$$
\begin{aligned}
\omega_x &= \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\sin\theta\ \sin\phi\\
\omega_y &= \dot{\theta}\sin\phi - \dot{\psi}\sin\theta\ \cos\phi\\
\omega_z &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}.
\end{aligned}
$$

11. Usando como coordenadas los ángulos de Euler, escribir el lagrangiano de un cuerpo rígido con su centro de masa fijo. Demostrar que el impulso conjugado de la coordenada ϕ es la componente z del momento angular respecto al centro de masa.

12. Una placa rectangular de masa m tiene lados a y b. La placa se mantiene fija por uno de sus bordes a un marco que está en el plano horizontal, como muestra las figura de la página siguiente. La placa puede girar respecto al marco como si fuera una puerta. A su vez, el marco rota alrededor de su centro con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega} = \Omega\hat{z}$. Aquí hay una animación. Hay gravedad, $\mathbf{g} = -g\hat{z}$. La figura de abajo muestra dos posibles elecciones de ejes fijos al cuerpo. La coordenada generalizada es la misma en ambos casos: el ángulo α. Encontrar el lagrangiano a partir de las dos elecciones de ejes. Notar que tiene que ser el mismo lagrangiano porque la coordenada generalizada es la misma. Analizar los puntos de equilibrio para α.



13. Un cilindro circular homogéneo de masa m, radio a y largo l está suspendido de un eje transversal a través de su centro de masa. Este eje gira con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega}$. Aquí hay una animación. Encontrar las posiciones de equilibrio para el ángulo θ y analizar su estabilidad. En el caso de los equilibrios estables, encontrar las frecuencias para pequeñas oscilaciones.



problema 13 problema 14

14. Los centros de dos discos de masa m se encuentran unidos por una barra de longitud l. La barra es perpendicular a los discos. Los momentos de inercia principales de cada disco respecto de su centro de masa son $I_1 = I_2 \equiv I$ e I_3. Notar que no se trata de un cuerpo rígido: los discos pueden rotar independientemente. Aquí hay una animación.

a) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

b) Escriba el lagrangiano y encuentre constantes de movimiento.

c) Escriba las ecuaciones de movimiento.

15. **El disco de Feynman I**. Un disco homogéneo es arrojado hacia arriba con un movimiento de rotación tal que $|\omega_3| \gg |\omega_1|, |\omega_2|$. Los momentos principales de inercia son I_3 e $I_1 = I_2 \equiv I$. La dinámica se desacopla en una parte de traslación y otra de rotación. Suponer que las condiciones iniciales son

$$\phi(0) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \psi(0) = 0,$$
$$\dot{\phi}(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad \dot{\psi}(0) = \omega \gg |\dot{\theta}_0|.$$

a) Escribir el lagrangiano de rotación usando los ángulos de Euler.

b) Mediante las integrales de movimiento, definir un problema unidimensional para θ.

c) Encontrar los ángulos de Euler en función del tiempo.

d) Encontrar los versores $\hat{e}_i$ en función del tiempo y demostrar que el versor $\hat{e}_3$ realiza un movimiento que tiene el doble de la frecuencia del movimiento de los versores $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$. Asumir que, puesto que el disco es plano, $I_3 = 2I$. Aquí hay una animación.

16. **El disco de Feynman II**. El resultado del problema anterior tiene la desventaja de depender de una elección particular, aunque razonable, de las condiciones iniciales con las que uno arrojaría al aire un disco girando. Para ver que la relación 2:1 de las frecuencias del movimiento de los versores depende sólo del hecho de que $|\omega_3| \gg |\omega_1|, |\omega_2|$, el mismo problema puede resolverse usando las ecuaciones de Euler.

a) Escribir y resolver las ecuaciones de Euler para un disco libre de torques, con momentos de inercia I_3 e $I_1 = I_2 \equiv I$. Esto da las componentes $\omega_i(t)$ en el sistema de ejes fijos al cuerpo. Por ahora no hay que hacer ninguna aproximación.

La ecuación que gobierna el movimiento de los versores $\hat{e}_i$ fijos al disco es

$$\dot{\hat{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \hat{e}_i.$$

Notar que, dados $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$, el versor $\hat{e}_3$ está determinado por $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$, de modo que si uno encuentra $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$, no es necesario resolver la ecuación diferencial para $\hat{e}_3$.

b) Mostrar que las ecuaciones diferenciales que satisfacen $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ son

$$\dot{\hat{e}}_1 = -\omega_2 \hat{e}_3 + \omega_3 \hat{e}_2, \qquad \dot{\hat{e}}_2 = \omega_1 \hat{e}_3 - \omega_3 \hat{e}_1.$$

c) Según el resultado del ítem a), ω_1 y ω_2 son del mismo orden, digamos, $|\omega_0|$. Bajo la hipótesis de que $|\omega_0| \ll |\omega_3|$, resolver el par de ecuaciones anteriores escribiendo $\hat{e}_i = \hat{e}_i^{(0)} + \delta\hat{e}_i$, donde $\hat{e}_i^{(0)}$ es de orden cero en ω_0 y $\delta\hat{e}_i$ es de orden uno.

d) A partir de los resultados anteriores, encontrar $\hat{e}_3$ hasta primer orden en ω_0.

e) Encontrar la relación entre las frecuencias dominantes del movimiento de $\hat{e}_3$ y de $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$. Mostrar que en el caso de un disco plano, con $I_3 = 2I$, esa relación es 2:1. Aquí hay una animación.

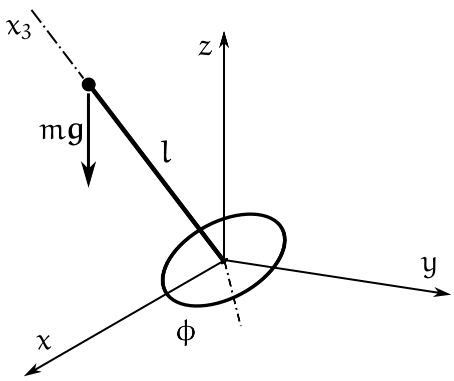
17. **Inestabilidad del eje intermedio**. Es una observación empírica (puede hacer la prueba con un libro) que, si se arroja un objeto con los tres momentos principales de inercia distintos, de tal manera que gire alrededor de un eje principal con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es estable, pero si se lo arroja tratando de que gire alrededor del eje principal con momento intermedio, el movimiento es muy irregular. Aquí hay una animación. Utilizando las ecuaciones de Euler, mostrar que cuando un cuerpo rígido rota alrededor de un eje con momento de inercia máximo o mínimo, el movimiento es estable, y es inestable si el eje corresponde al momento intermedio.

18. A partir de las ecuaciones de Euler, demostrar que, para un cuerpo plano cuyo vector normal es $\hat{e}_3$, $\omega_1^2 + \omega_2^2$ es una constante de movimiento.

19. **Peonza asimétrica**. El problema de la peonza asimétrica siempre puede resolverse por cuadraturas. Sin embargo, en la mayoría de los casos, las integrales involucran funciones elípticas. En este problema las condiciones iniciales están elegidas de tal manera que la solución queda en términos de funciones hiperbólicas. Considerar, entonces, una lámina homogénea con momentos de inercia $I_1 < I_2$ e $I_3 = I_1 + I_2$. Notar que esto último es consecuencia de que el cuerpo es plano. El centro de masa está fijo y la lámina puede rotar libremente. En $t = 0$, la velocidad angular inicial está en el plano 13, tiene módulo Ω y forma un ángulo $\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ con $\hat{e}_3$. Si $I_1/I_2 = -\cos 2\alpha$, encontrar $\omega_i(t)$. Analizar la solución para $t \to \infty$. Aquí hay una animación que hay que ver hasta el final.

20. Un giróscopo tiene momentos de inercia I_3 e $I_1 = I_2 \equiv I$. Su centro de masa está fijo en el origen. Inicialmente $\theta = \pi/2$, $\phi(0) = \psi(0) = 0$, $\dot{\phi}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$ y $\dot{\psi}(0) = \omega$. Un peso mg está fijo sobre el eje x_3 a una distancia l del origen, como muestra la figura de la página siguiente. Aquí hay una animación.

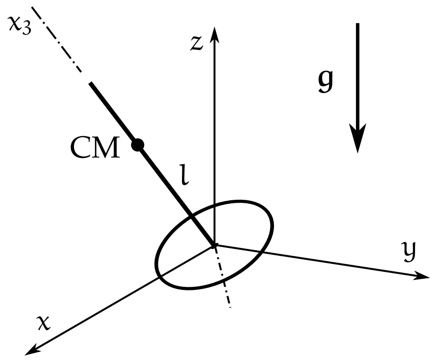
    a) Escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L.
    b) Linealizar las ecuaciones bajo la suposición de que $\left|\theta - \frac{1}{2}\pi\right| \ll 1$ y las velocidades $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$ son pequeñas comparadas con $\dot{\psi}$.
    c) Resolver las ecuaciones linealizadas e interpretar los resultados.



21. El giróscopo del problema anterior rota verticalmente. ¿Bajo qué condiciones este movimiento es estable?

22. Una peonza simétrica de masa M rota con un punto fijo sobre el eje de simetría, como muestra la figura. La distancia entre el centro de masa y el punto fijo es l. Hay gravedad, $\mathbf{g} = -g\,\hat{z}$. Los momentos principales de inercia con respecto al punto fijo son I_3 e $I_1 = I_2 \equiv I$. En el instante inicial

$$\theta(0) = \frac{\pi}{3}, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = 2\sqrt{\frac{Mgl}{3I}} \;\text{ y }\; \dot{\psi}(0) = \left(\frac{3I}{I_3} - 1\right)\sqrt{\frac{Mgl}{3I}}.$$



a) Escribir el lagrangiano y encontrar los momentos canónicos conservados. ¿Cuánto vale la energía del sistema?

b) Estudiar el problema unidimensional equivalente, graficar el potencial efectivo y discutir cualitativamente el comportamiento de la peonza a partir de este último.

c) Mostrar que la ecuación de movimiento para el ángulo θ se puede escribir como $\dot{u}^2 = A(1-u)^2(2u-1)$, donde $u = \cos\theta$ y A es una constante que depende de los datos del problema. Encontrar $u(t)$.

23. **Aditividad de las velocidades angulares**. Demostrar que si un cuerpo rígido tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ respecto de un sistema de ejes con versores $\hat{e}_i$, que a su vez está rotando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_2$ respecto de un sistema de ejes con versores $\hat{x}_i$, entonces la velocidad angular del cuerpo rígido respecto de este sistema es $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

24. **Girocompás**. Un girocompás es un cuerpo rígido simétrico montado de tal manera que su eje de simetría está restringido a moverse en un plano horizontal paralelo a la superficie de la Tierra.

Elegir un par de coordenadas generalizadas y escribir el lagrangiano para un girocompás en un punto fijo de la superficie terrestre a una latitud $\pi/2 - \theta_0$. Aquí puede ser útil usar la aditividad de las velocidades angulares. Mostrar que la componente de la velocidad angular ω_3 a lo largo del eje de simetría se conserva. Mostrar que, si $|\omega_3| > (I_1/I_3)\omega_0 \sin\theta_0$, donde ω_0 es la velocidad angular de rotación de la Tierra, entonces el eje de simetría oscila en el plano horizontal alrededor de la línea norte-sur. Encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones. Aquí hay una animación. En la práctica $\omega_0 \ll |\omega_3|$.

25. Un giróscopo está construido de la siguiente manera (ver la figura):

    i) un marco circular exterior que se mantiene siempre sobre el plano vertical y que puede girar alrededor del eje z.

    ii) un marco circular interior, montado sobre el marco exterior como muestra la figura.

    iii) una peonza simétrica, montada a su vez sobre el marco interior.

    Los dos marcos tienen los mismos momentos principales respecto a sus centros de masa, $I_a = I_b$ e I_c. La peonza tiene momentos principales de inercia $I_1 = I_2 \equiv I$ e I_3 respecto de su centro de masa. El giróscopo está centrado, de modo que los centros de masa de los tres elementos siempre están en reposo. Aquí hay una animación.

    a) Elegir coordenadas y escribir el lagrangiano.

    b) ¿Es este problema equivalente al de un giróscopo en donde no se tenga en cuenta la inercia de los marcos pero se modifiquen los momentos I e I_3 de la peonza?

    c) Encontrar al menos 3 constantes de movimiento, expresadas en términos de las coordenadas generalizadas y sus velocidades.

    d) Reducir el problema a un problema unidimensional para un solo grado de libertad.