Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Guía 7: *Formalismo hamiltoniano. Transformaciones canónicas.*

1. Escribir el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para:

   a) Un oscilador armónico unidimensional. Graficar el retrato de fase.

   b) Un péndulo de longitud l y masa m en un campo gravitatorio $\mathbf{g} = -g\hat{z}$. Graficar el retrato de fase. Hallar los puntos de equilibrio y clasificarlos. Encontrar las ecuaciones de las curvas que separan las regiones de libración y rotación.

   c) Una partícula de masa m en un potencial central $V(r)$ usando coordenadas esféricas. Escribir las constantes E, L_z y L^2 en función de las coordenadas canónicas. A partir de estas relaciones, graficar los retratos de fase en los planos rp_r, θp_θ y φp_φ para los potenciales $V(r) = -k/r$ y $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$, donde $k > 0$.

   d) Un cuerpo rígido de masa m, con simetría de revolución respecto de un eje, con un punto fijo en el eje de simetría, en un campo gravitatorio $\mathbf{g} = -g\hat{z}$ usando los ángulos de Euler. El centro de masa está a una distancia l del punto fijo. Los momentos principales de inercia respecto al centro de masa son $I_1 = I_2$ e I_3. Graficar los retratos de fase en el plano θp_θ en los casos en que $p_\varphi = p_\psi$ y $p_\varphi = 0$.

   e) Un oscilador armónico, tridimensional e isótropo en coordenadas cilíndricas. Graficar los retratos de fase en los planos ρp_ρ, φp_φ y zp_z.

   f) Una partícula de masa m que se mueve en un aro vertical de radio a, centrado en el origen y que rota alrededor del eje z con velocidad angular constante ω. Hay un campo gravitatorio $\mathbf{g} = -g\hat{z}$. Graficar el retrato de fase teniendo en cuenta su dependencia con los parámetros del problema.

   g) En relatividad especial: una partícula libre de masa m. Usar coordenadas cartesianas, esféricas y cilíndricas.

   h) En relatividad especial: una partícula de masa m y carga e bajo la acción de un campo electromagnético caracterizado por un potencial electrostático central $\Phi(r)$. Usar coordenadas esféricas.

2. Una partícula de masa m se mueve en el eje z bajo la acción del potencial

$$V(z) = \begin{cases} mgz, & \text{si } z \geqslant 0, \\ \infty, & \text{si } z < 0, \end{cases}$$

   donde $g > 0$. Es decir, se trata de una partícula que rebota elásticamente contra el suelo en un campo gravitatorio uniforme. Graficar el retrato de fase.

3. Demostrar que si el lagrangiano es $L = L_2 + L_1 + L_0$, donde L_n es homogéneo de grado n en las velocidades, entonces $h = L_2 - L_0$.

4. Como aplicación del problema anterior, escribir el hamiltoniano de una partícula de masa m y carga e en un campo electromagnético caracterizado por potenciales $\mathbf{A}$ y Φ. Usar como *coordenada* el vector $\mathbf{r}$.

5. En contraste con el problema anterior, escribir el hamiltoniano de una partícula relativista de masa m y carga e en un campo electromagnético caracterizado por potenciales $\mathbf{A}$ y Φ. Usar como *coordenada* el vector $\mathbf{r}$.

6. Mostrar que si una velocidad $\dot{q}_i$ aparece en el lagrangiano en un único término de la forma $\frac{1}{2}a(\mathbf{q}, t)\dot{q}_i^2$, entonces, en el hamiltoniano, p_i aparece en un término de la forma

$$\frac{p_i^2}{2a(\mathbf{q}, t)}.$$

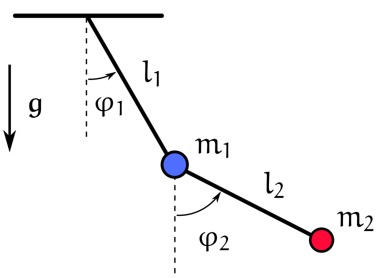
7. Como aplicación del problema anterior, vuelva a calcular, sin hacer ninguna cuenta, el hamiltoniano de una partícula de masa m en un potencial central $V(r)$.

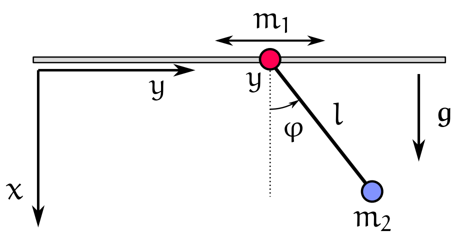
8. Demostrar que si el lagrangiano de un sistema es de la forma

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \tfrac{1}{2}a_{ij}(\mathbf{q}, t)\,\dot{q}_i\dot{q}_j - V(\mathbf{q}, t),$$

donde $a_{ij} = a_{ji}$, entonces $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2}p_i\dot{q}_i + V(\mathbf{q}, t)$. En algunos problemas, esto facilita el cálculo de H.

9. Como aplicación del problema anterior, calcule el hamiltoniano de un péndulo doble y el hamiltoniano del péndulo con soporte móvil del problema 2 de la Guía 1.





Para valorar mejor este método, calcule los hamiltonianos pero sin usar el problema 8.

10. El hamiltoniano de un sistema con un solo grado de libertad es $H(q, p) = 2\log\left|q \sec \frac{1}{2}qp\right|$. Escribir el lagrangiano y la ecuación de E-L. Este sistema está en la Guía 1.

11. Una partícula de masa m se mueve sobre una esfera centrada en el origen y cuyo radio es una función conocida $r(t)$. Hay un campo gravitatorio uniforme de aceleración g. Escribir H y las ecuaciones canónicas. ¿Se conserva H? ¿Es $H = E$? ¿Se conserva E?

12. Una partícula de masa m se mueve sobre una superficie de revolución definida por $z = f(\rho)$. Hay gravedad, $\mathbf{g} = -g\hat{z}$, con $g > 0$. Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Muestre que se conserva L_z. ¿Se conserva H? ¿Es $H = E$? Grafique el retrato de fase en el plano ρp_ρ cuando $f(\rho) = \lambda\rho$ y $f(\rho) = \frac{1}{2}\lambda\rho^2$, donde $\lambda > 0$.

13. Demuestre las siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, donde f, g y h son funciones de $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ y t; F es una función de una variable, y c es una constante.

$$\begin{cases} [f, c] = 0, \\ [f, f] = 0, \\ [f, F(f)] = 0, \\ [f, g] + [g, f] = 0, \\ [f + g, h] = [f, h] + [g, h]. \end{cases} \qquad \begin{cases} [fg, h] = f[g, h] + [f, h]g, \\ \frac{\partial}{\partial t}[f, g] = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right], \\ [f, g^n] = n g^{n-1}[f, g], \\ [f, F(g)] = F'(g)[f, g]. \end{cases}$$

14. Mediante la identidad de Jacobi, muestre que si f y g son constantes de movimiento, entonces $[f, g]$ también es una constante de movimiento.

15. El momento angular de una partícula es $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, donde $\mathbf{r}$ y $\mathbf{p}$ son coordenadas canónicas.

    a) Calcule los corchetes de Poisson $[r_i, L_j]$, $[p_i, L_j]$, $[L_i, L_j]$ y $[L_i, L^2]$.
    b) Muestre que si dos componentes de $\mathbf{L}$ se conservan, entonces se conserva la tercera.
    c) ¿Bajo qué condiciones pueden ser H y L^2 momentos canónicos? Ídem para H y L_z.
    d) ¿Pueden ser L_x y L_y momentos canónicos? Ídem para L_x y L^2.

16. Demostrar que las coordenadas polares en el plano qp de un sistema con un solo grado de libertad no son coordenadas canónicas. Es decir, suponiendo que q y p tienen las mismas dimensiones, $\rho = \sqrt{q^2 + p^2}$ y $\phi = \arctan(p/q)$ no son coordenadas canónicas. Si en lugar de ρ se toma $P = f(\rho)$ como primera coordenada, ¿qué función puede elegirse para que P y ϕ sean coordenadas canónicas?

17. Asumiendo que todo está debidamente adimensionalizado, muestre que la transformación $Q = \log(\frac{\sin p}{q})$, $P = q \cot p$ es canónica y determine las funciones generatrices F_i. Aplique la transformación al oscilador armónico con $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$. Encuentre al menos cinco libros que incluyan esta transformación. Encuentre al menos un libro en donde esta transformación se aplique con algún provecho.

18. Considere un oscilador armónico unidimensional de frecuencia angular ω:

    a) Halle la trasformación canónica de función generatriz $F_1(q, Q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo λ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q, P) = \omega P$. Resuelva las ecuaciones de movimiento en estas coordenadas. Aplique la transformación inversa y encuentre la solución general en las coordenadas originales.
    b) Halle la función generatriz de tipo $F_2(q, P)$ que genera la misma transformación canónica $(q, p) \to (Q, P)$. ¿Qué relación hay entre F_1 y F_2?

19. Considere un oscilador bidimensional cuyo hamiltoniano es

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Muestre que la siguiente transformación es canónica, halle el nuevo hamiltoniano $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton:

$$\begin{cases} x = X\cos\lambda + \dfrac{P_y \sin\lambda}{m\omega}, \\[2ex] y = Y\cos\lambda + \dfrac{P_x \sin\lambda}{m\omega}, \end{cases} \qquad \begin{cases} p_x = -m\omega Y \sin\lambda + P_x \cos\lambda, \\[2ex] p_y = -m\omega X \sin\lambda + P_y \cos\lambda. \end{cases}$$

20. Considere el hamiltoniano

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left(\frac{p_1 - p_2}{2q_1}\right)^2 + p_2 + (q_1 + q_2)^2$$

y una familia de transformaciones $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ tal que

$$\begin{cases} Q_1 = q_1^2, \\[1ex] Q_2 = q_1 + q_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1 = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \\[1ex] P_2 = g(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \end{cases}$$

a) Encuentre la forma más general del segundo par de ecuaciones de transformación de modo que la transformación $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ sea canónica. La solución puede depender de funciones arbitrarias ligadas por una ecuación diferencial.

b) Muestre que para una elección particular de f y g, en el nuevo hamiltoniano las coordenadas $\mathbf{Q}$ son cíclicas.

c) Usando este hamiltoniano, resuelva las ecuaciones para $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{P}$ y, mediante la transformación inversa, encuentre $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$.

d) Encuentre $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$ directamente a partir de las ecuaciones canónicas para H.

e) ¿Existe el lagrangiano de este sistema?

21. Mostrar que la siguiente transformación dependiente del tiempo es canónica:

$$q = Q + \frac{tP}{m}, \qquad p = P.$$

a) Determinar una función generatriz.

b) Si $H(q, p, t) = p^2/2m + V(q)$, encontrar el nuevo hamiltoniano $K(Q, P, t)$. ¿Se conserva H? ¿Se conserva K?

c) Si $V(q) = \lambda q$, resolver las ecuaciones de movimiento para las variables Q y P. A partir de esas soluciones encontrar $q(t)$ y $p(t)$. Comparar con las soluciones obtenidas directamente a partir de las ecuaciones de Hamilton para H.