Rafael González
Tomás Michi

Simetrías

Entendemos por simetría a una transformación que produce un invariante. La invariancia significa que, luego de aplicada la transformación a una configuración, con todas sus características, la configuración inicial y la final (resultante de dicha transformación) son indistinguibles.

En principio, este invariante está asociado a características geométricas. Sin embargo, podría estar asociada a alguna magnitud física.

Simetrías discretas

Tomemos como primer ejemplo las simetrías discretas como es el caso de un cuadrado. A un cuadrado podemos girarlo 45° en sentido anti-horario, es decir, aplicarle una *transformación* (figura 1). En este caso se ve que la figura resultante tiene características distinguibles de la original. Si al mismo cuadrado, en cambio, lo giráramos 90° (figura 2), al aplicar la transformación la figura resultante sería indistinguible de la original. En este caso decimos que el cuadrado presenta una *simetría discreta de rotación* al aplicarle giros de 90°.

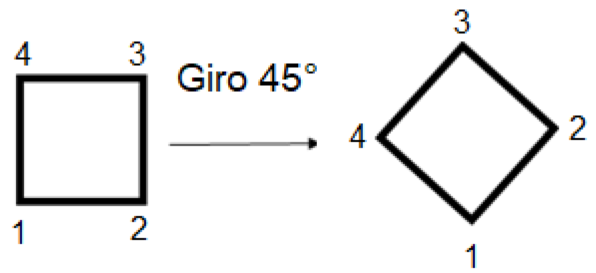


Figura 1

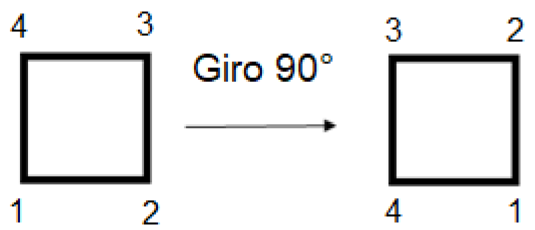


Figura 2

Ahora bien, si en lugar de tratarse de un cuadrado, fuese un hexágono regular, diríamos que presenta una simetría discreta frente a rotaciones de 60° y no de 90°. Si acaso se tratara de un círculo, inmediatamente verificaríamos que esta figura se mantendría indistinguible o invariante frente a cualquier rotación pura independientemente de la magnitud del ángulo de giro y, por lo tanto, estaríamos en presencia de una simetría de rotación *continua*.

Rafael González
Tomás Michi

Simetrías continuas

En física nos vamos a interesar más bien en simetrías continuas, vinculadas no sólo a características geométricas sino justamente a magnitudes físicas. Por ser continuas, están asociadas a transformaciones infinitesimales de las coordenadas generalizadas (transformaciones infinitesimales espaciales) y del tiempo (transformaciones infinitesimales temporales). Para que esto tenga sentido, consideramos a las coordenadas generalizadas y al tiempo como independientes, es decir que cuando variamos alguna coordenada generalizada, el tiempo debe permanecer constante y viceversa. Esto significa que no consideramos la dependencia de las coordenadas como función del tiempo, pero sí a la aparición explícita del tiempo en alguna característica de la configuración (por ejemplo, en una ecuación de vínculo donde $\emptyset = \omega t$, en cuyo caso tenemos una ecuación de vínculo dependiente del tiempo y por lo tanto $\emptyset$ ya no es una coordenada generalizada y no la podemos considerar para una transformación espacial). Por lo tanto, aunque podríamos considerar transformaciones infinitesimales en las que tomemos los dos tipos de variaciones simultáneamente (siempre considerando las coordenadas y el tiempo como independientes) aquí tomaremos variaciones infinitesimales espaciales y variaciones infinitesimales temporales, en forma separada.

Supongamos la configuración de la figura 3. La varilla vertical tiene engarzada a otra horizontal que en el extremo tiene, a su vez, una masa m. Las varillas tienen masa despreciable. La varilla horizontal se puede mover libremente en dirección vertical (según z) y rotar según $\emptyset$. Para describir la posición de la masa, utilizamos un sistema de referencia inercial y un sistema de coordenadas cilíndricas con origen en 0. La masa parte inicialmente de la posición (L; $\emptyset_0$; z_0). Vamos a analizar la configuración en distintas condiciones:

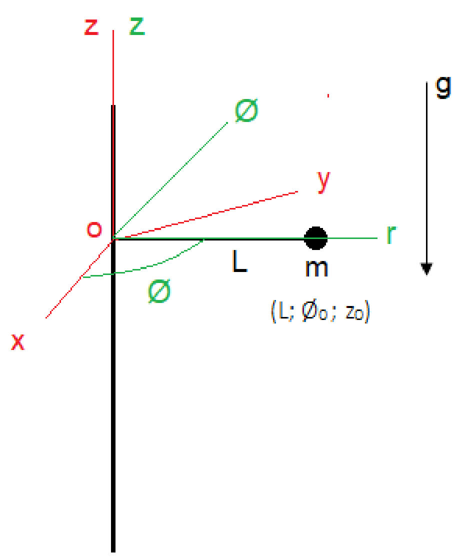


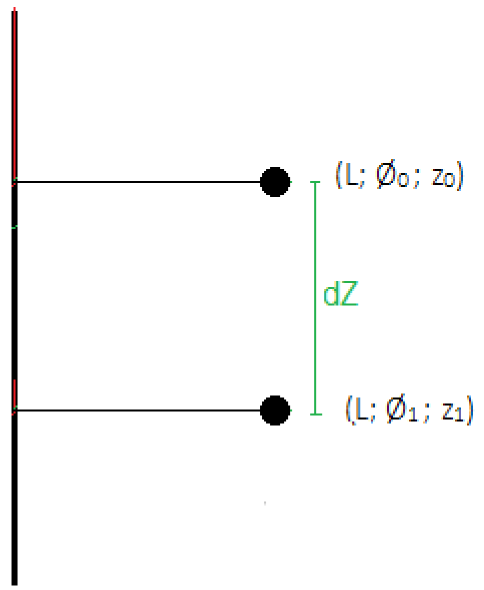
Figura 3

1) Sistema con g=0 (sin gravedad). Efectuamos una transformación de traslación infinitesimal a lo largo del eje z.

Rafael González
Tomás Michi

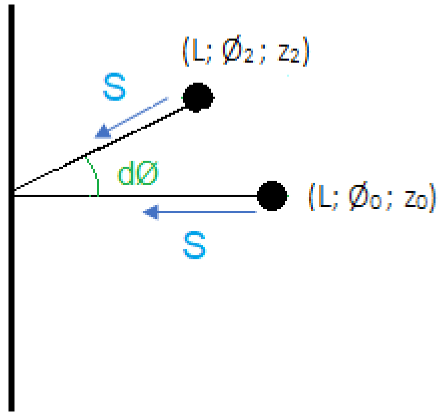
2) Sistema con g=0 (sin gravedad). Efectuamos una trasformación de rotación infinitesimal alrededor del eje z.
3) Sistema con g≠0 en dirección del eje z. Efectuamos las mismas transformaciones de los puntos 1) y 2), respectivamente.
4) Sistema con g≠0 en perpendicular a z. Efectuamos una trasformación de rotación infinitesimal alrededor del eje z.
5) Sistema con g≠0 en perpendicular a z. Efectuamos ahora una transformación temporal infinitesimal.
6) Idem 5) pero con el sistema girando a ω=constante alrededor del eje z.

1) En este caso el sistema se traslada hacia abajo hasta la posición $(L; \varnothing_1 ; z_1)$, donde $\varnothing_1=\varnothing_0$ ya que se trata de una traslación pura. Notar que no hay ninguna fuerza en la dirección de la traslación.



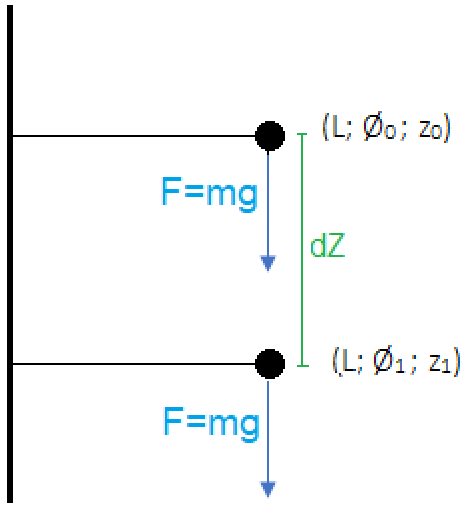
La situación 1 es indistinguible tanto geométrica como físicamente de la situación 0. Como el sistema se mantuvo invariante luego de trasladarse, decimos que la configuración tiene ***simetría de traslación*** y que, en la dirección z, el espacio es homogéneo.

2) En este caso, la única fuerza que actuaría sobre m es la tensión S en la barra, la cual actúa en sentido hacia el origen de coordenadas (fuerza central). Esta es siempre perpendicular a la trayectoria de la masa y es la que determina el movimiento circular. No hay ninguna fuerza que haga subir ni bajar la varilla ni que tienda a frenar la rotación. La transformación de rotación se efectúa hasta que la masa se encuentra en $(L; \varnothing_2 ; z_2)$, donde $Z_2=Z_0$.



Análogamente al caso anterior, la situación 2 es indistinguible de la situación 0, la configuración se mantuvo invariante luego de la rotación y, por lo tanto, decimos que tiene ***simetría de rotación.*** También que, con relación a la rotación alrededor del eje z, el espacio es isótropo.

3) En este caso, la masa se encuentra sometida a una fuerza = mg y por lo tanto se aceleraría en dirección de g.

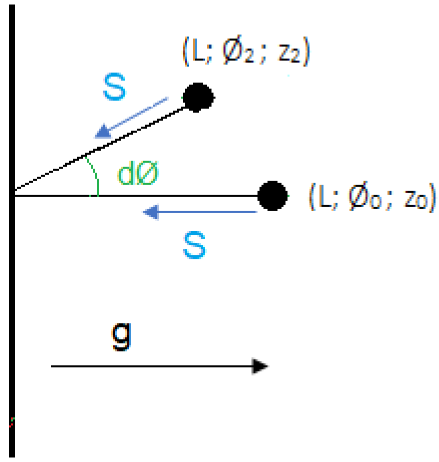


Si analizamos la energía potencial vemos que se calcula como Ep= mgz, de manera que en el punto 0 vale E_{p0}= mgz_0 y en el punto 1, E_{p1}= mgz_1. Vemos que cambió la energía potencial como producto de la traslación y por este hecho la situación 1 es distinguible de la 0.

Sin embargo, si en este caso la masa rotara hacia la posición 2, la energía potencial en 2 sería E_{p2}= mgz_2 = mgz_0= E_{p0} ya que Z_2=Z_0. Concluimos que la simetría de rotación se mantiene cuando g es paralela al eje de rotación.

Vemos con este ejemplo que la presencia de una fuerza aplicada en dirección de la traslación se vincula a una propiedad del espacio (la no homogeneidad de este) y tiene la propiedad de romper con la simetría de translación.

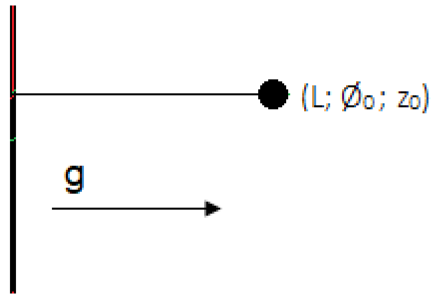
4) En este caso, la fuerza de gravedad no es en sentido de la traslación sino perpendicular a esta.



La masa parte de (L; $\emptyset_0$; z_0) que, en este caso, es la posición de menor potencial (análogo a un péndulo). En dirección del eje z no existe ninguna fuerza (es decir, hay simetría de traslación según z). Ahora rotamos el sistema hasta la posición (L; $\emptyset_2$; z_2). Al rotar, la masa deberá vencer la fuerza de gravedad, por lo que variará la energía potencial. Vemos que $E_{p0}= -mg \cos \emptyset_0 \neq -mg\cos\emptyset_2=E_{p2}$, $(\emptyset_0 \neq \emptyset_2)$.

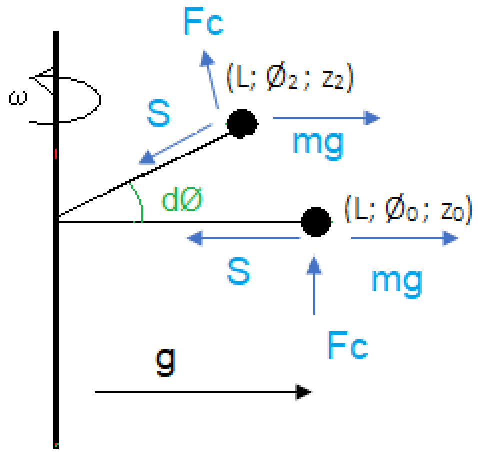
Concluimos que la situación 2 es distinguible de la 1 y que la fuerza=mg rompe, en este caso, con la simetría de rotación. Se dice que el espacio no es isótropo con respecto a la rotación infinitesimal alrededor del eje z.

5) En este caso efectuamos una transformación temporal infinitesimal. Consideramos que el tiempo y las coordenadas generalizadas (z; Ø) son independientes, por lo que estas últimas quedan fijas al efectuar la transformación. Como la transformación realizada no produce ningún cambio, decimos que la configuración tiene simetría temporal y que el tiempo es homogéneo ¿Qué significará, entonces, la isotropía del tiempo?



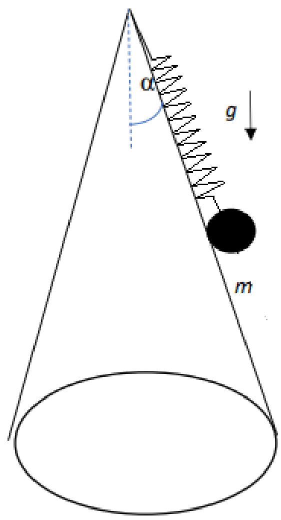
6) En este caso el sistema gira a velocidad constante, de manera que la coordenada $\emptyset= \omega t$. Aparece una fuerza de contacto Fc que representa la acción que la barra ejerce sobre la masa para mantenerla a velocidad constante. La energía potencial, al igual que el caso anterior vale $E_p= -mg \cos \emptyset$, es decir que depende del ángulo Ø. Pero como $\emptyset= \omega t$, se deduce que $E_p= -mg \cos (\omega t)$.

Podemos pensar, entonces, el cambio de posición de 0 a 2 como el producto de una transformación temporal infinitesimal. Al aplicarle al sistema esta transformación se deduce que el potencial varía, de manera que el sistema no resulta invariante ante transformaciones temporales infinitesimales. Decimos, en este caso, que el tiempo es no homogéneo.



Para pensar: ¿Qué tipo de simetrías están presentes en las siguientes configuraciones?

a) Una masa colgada de un resorte cuyo origen está ligado al vértice de un cono.



b) Una masa se puede mover libremente sobre la superficie de un cascarón esférico.