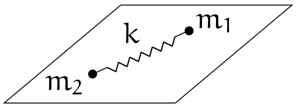
Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

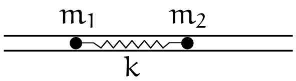
Guía 1: *Formulación lagrangiana.*

1. Para los casos siguientes, ¿cuántos grados de libertad de configuración tiene cada sistema? Proponga conjuntos adecuados de coordenadas generalizadas.

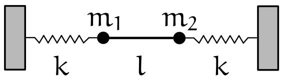


a) m_1 y m_2 se mueven en el plano de la mesa

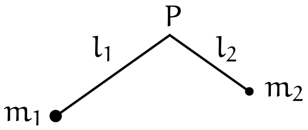
b) Ídem, pero la mesa rota con ω constante.



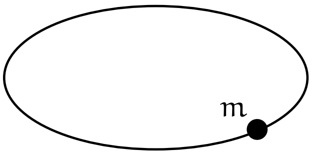
c) m_1 y m_2 se hallan dentro de un tubo. Si q_1 y q_2 se miden a partir del centro de masa, ¿son coordenadas apropiadas?



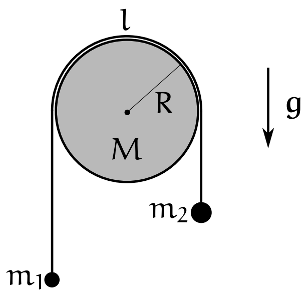
d) Las dos masas se hallan unidas por una barra rígida. Analice los casos en que las masas pueden moverse horizontalmente o en el plano.



e) Analice los casos P fijo y P móvil.

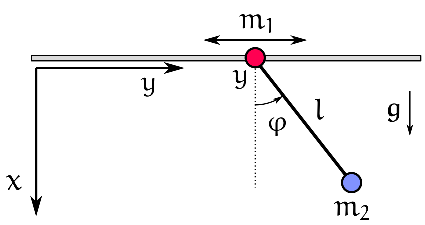


f) Una masa enhebrada en un alambre elíptico.



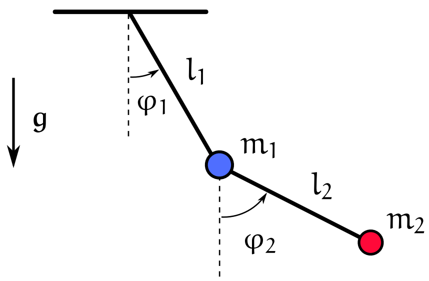
g) Una máquina de Atwood. Analice los casos en que la cuerda desliza y no desliza sobre la rueda.

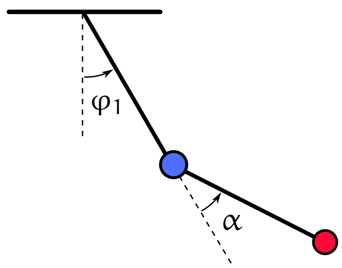
2. Dos partículas están unidas por una barra sin masa de longitud l. La partícula 1 está restringida a moverse sobre el eje y. La barra puede girar en el plano de la figura. Aquí hay una animación.



   a) Dar la posición de cada partícula en función de las coordenadas generalizadas y y φ.
   b) Escribir el lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L).
   c) Hallar constantes de movimiento. ¿A qué propiedades del sistema están asociadas?
   d) Reducir el problema a un problema unidimensional equivalente.
   e) Si la velocidad del centro de masa en la dirección y es nula, demostrar que la partícula 2 describe un arco de elipse. *Ayuda*: use las constantes de movimiento.

3. Considerar el péndulo doble. La figura indica dos posibles conjuntos de coordenadas generalizadas. Resolver los dos primeros ítems para cada conjunto. En el último ítem, usar el que resulte más conveniente. Elegir los ejes de modo que $\mathbf{g} = g\hat{x}$. Aquí hay una animación.





   a) Escribir la posición de cada partícula en términos de las coordenadas generalizadas.
   b) Escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L.
   c) En este problema, E se conserva. Si $g = 0$, hay otra cantidad conservada. ¿Cuál es? ¿Con qué propiedad del sistema está relacionada? Usando estas dos conservaciones, reducir el problema a un problema unidimensional equivalente. *Ayuda:* si tiene una cuadrática

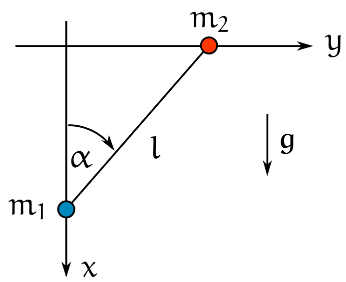
$$f(x) = \tfrac{1}{2}ax^2 + bx + c, \tag{1}$$

   entonces

$$f(x) = \frac{f'(x)^2}{2a} - \frac{b^2}{2a} + c. \tag{2}$$

   Parte no menor de la ayuda es el dato de que esto es una ayuda.

4. Dos partículas, de masas m_1 y m_2, están unidas por una barra sin masa de longitud l; m_1 se mueve sólo sobre el eje x y m_2 sólo sobre el eje y. Aquí hay una animación.



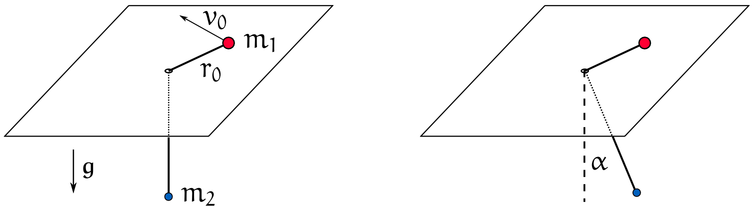
   a) Escribir el lagrangiano y la ecuación de E-L para α.
   b) Hallar la tensión F en la barra como función de α y $\dot{\alpha}$.
   c) Para valores de $\alpha \ll 1$, ¿cuál es el período del movimiento?

5. Dos partículas, de masas m_1 y m_2, están unidas por un hilo de longitud L, como indica la figura de la página siguiente. La partícula m_1 se mueve en el plano horizontal, y m_2 sólo verticalmente. Aquí hay una animación. En $t = 0$, m_1 se encuentra a una distancia $r_0 < L$ del orificio y se le aplica una velocidad v_0 perpendicular al hilo.

a) Escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L y hallar sus integrales primeras en términos de las condiciones iniciales.

b) Hallar la tensión del hilo en función de r.

c) Repetir a) pero ahora la partícula m_2 puede moverse en las dos direcciones del plano xz. Inicialmente el hilo forma un ángulo α_0 con al vertical y $\dot{\alpha} = 0$.



6. Una partícula se mueve en el plano $z = 0$ bajo la acción de un potencial central $V(r)$.

a) Escribir el lagrangiano usando las coordenadas r y φ.

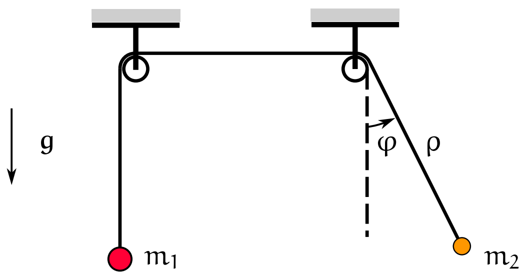
b) Usando la conservación del momento angular, eliminar $\dot{\varphi}$ en términos de r.

c) A partir del resultado anterior y de la conservación de la energía, escribir un problema unidimensional equivalente para la coordenada r en la forma de una ecuación de conservación.

d) A partir de esta ley de conservación, deducir por analogía cuál es el lagrangiano efectivo para r.

e) ¿Qué resultado se obtiene si en el lagrangiano original se reemplaza $\dot{\varphi}$ en términos de r usando la conservación del momento angular? ¿Es este un procedimiento válido para obtener el lagrangiano efectivo para r?

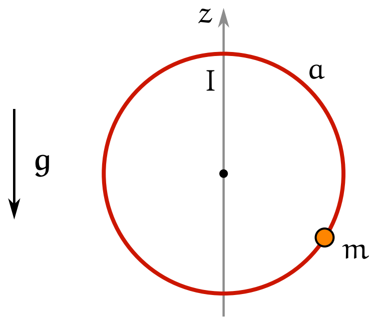
7. *Swinging Atwood Machine*. Dos partículas, de masas m_1 y m_2, están unidas por una cuerda sin masa suspendida de dos poleas de radio despreciable. La partícula de la izquierda se mueve sólo verticalmente. La partícula de la derecha puede moverse en todo el plano. Aquí hay una animación de una órbita periódica.



a) Escribir el lagrangiano y encontrar las ecuaciones de E-L para ρ y φ.

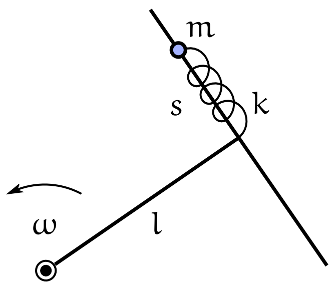
b) Si $m_1 = m_2$, suponer que la partícula de la izquierda está inicialmente en reposo, mientras que la partícula de la derecha realiza oscilaciones de amplitud $\epsilon \ll 1$. ¿Cuánto vale, en promedio, la aceleración inicial de la partícula de la izquierda (promediada durante unos pocos períodos)? ¿En qué sentido se mueve?

8. Una partícula de masa m se mueve en un aro vertical de radio a, masa M y momento de inercia I respecto a cualquiera de sus diámetros. El aro puede rotar alrededor del eje z. El centro del aro está fijo. Aquí hay una animación.

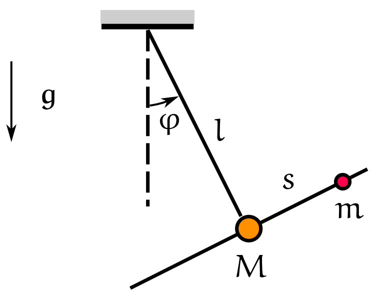


   a) Elegir coordenadas generalizadas, escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L.
   b) ¿Se conserva la energía? ¿Se conserva la función h? ¿Es h igual a la energía?
   c) Reducir el problema a un problema unidimensional equivalente.
   d) Si en lugar de girar libremente, el aro rota con velocidad angular ω constante, escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L. ¿Se conserva la energía? ¿Se conserva la función h? ¿Es h igual a la energía?
   e) Si el aro no tiene masa ni momento de inercia, ¿cuántos grados de libertad de configuración tiene el sistema? Escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L.

9. Dos barras forman una T rígida. Un extremo de la primera barra está fijo al origen y todo el conjunto rota en el plano de la figura con velocidad angular constante ω. Una partícula de masa m se desliza a lo largo de la segunda barra. La partícula está unida al punto de intersección de las barras mediante un resorte de constante k y longitud natural cero. Encontrar y resolver la ecuación de E-L para $s(t)$, donde s se mide sobre la segunda barra a partir del punto de intersección. ¿Se conserva la energía? ¿Se conserva la función h? Existe un valor especial de ω; ¿cuál es y por qué es especial?



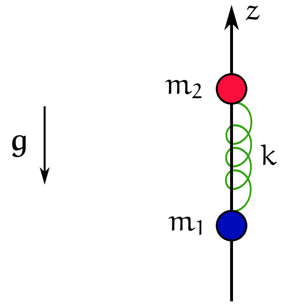
Problema 9.



Problema 10.

10. En el péndulo de la figura, la partícula de masa m puede desplazarse a lo largo de una barra muy larga perpendicular a la barra principal del péndulo (m puede pasar a través de M). Las coordenadas generalizadas son φ y s. Encontrar las ecuaciones de E-L.

11. Dos partículas se mueven sobre el eje z unidas por un resorte de longitud natural cero y constante elástica k. Hay gravedad. Escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L eligiendo como una de las coordenadas generalizadas la posición relativa entre las partículas, $Z = z_2 - z_1$. Encontrar una ecuación de movimiento independiente para Z. ¿Cuál es el rol de g en esta ecuación? Interpretar. ¿Cuál sería la generalización de este resultado?



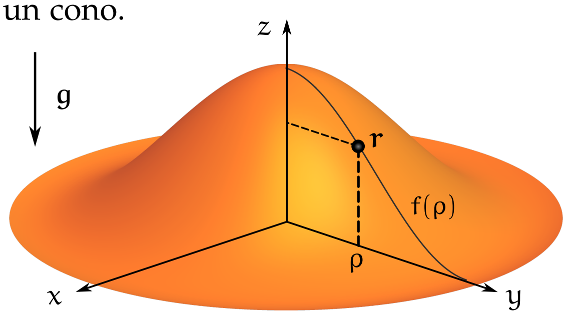
12. Un péndulo esférico consiste en una partícula de masa m unida al origen por una barra de longitud a. Hay gravedad, $\mathbf{g} = -g\hat{z}$, con $g > 0$. Aquí hay una animación.

    a) Escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L.

    b) A partir de las cantidades conservadas, encontrar un problema unidimensional equivalente para la coordenada θ. Demostrar que siempre existe, para el problema unidimensional, un punto de equilibrio estable con $\theta = \theta_0 > \pi/2$.

    c) En función del ángulo θ_0, encontrar la frecuencia angular ω de las oscilaciones alrededor del movimiento estacionario del ítem anterior. ¿Cuál es la relación entre las frecuencias ω y $\dot{\varphi}$? Analizar los casos límite $\theta_0 \to \pi/2$ y $\theta_0 \to \pi$.

13. Una partícula de masa m se mueve sobre una superficie de revolución definida por la ecuación $z = f(\rho)$. Hay gravedad, $\mathbf{g} = -g\hat{z}$, con $g > 0$. Aquí hay una animación de una órbita periódica sobre un cono.



    a) Escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L.

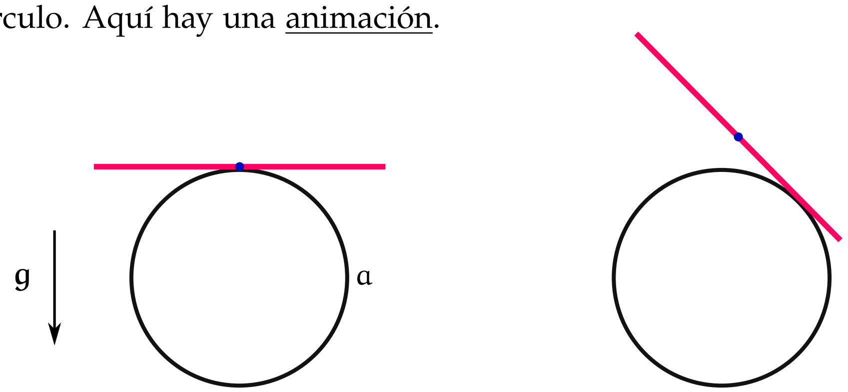
    b) Encontrar un problema unidimensional equivalente para la coordenada ρ.

    c) ¿Bajo qué condiciones puede haber órbitas circulares con ρ constante? ¿Bajo qué condiciones ese movimiento es estable?

    d) Encontrar la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor del movimiento estacionario.

    e) Estudiar en particular los casos $f(\rho) = -\lambda/\rho^n$ y $f(\rho) = \lambda\rho^n$, con $n, \lambda > 0$.

14. Una barra de masa m y momento de inercia I respecto a su centro de masa rueda sin deslizar sobre un círculo fijo de radio a. Hay gravedad. Cuando la barra está en la posición que muestra la figura de la izquierda, su centro está justo en el punto más alto del círculo. Elegir coordenadas generalizadas, escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L. Recordar que la energía cinética puede escribirse como $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\Omega^2$, donde v es la velocidad del centro de masa y Ω es la velocidad angular de la barra. Asumir que la barra es lo suficientemente larga para que sus extremos nunca entren en contacto con el círculo. Aquí hay una animación.



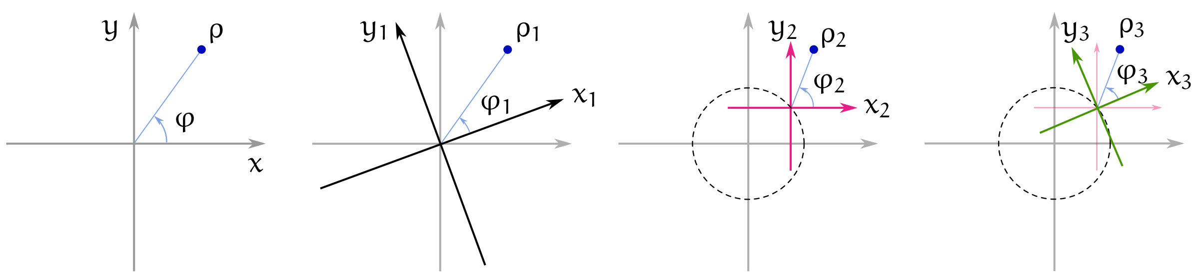
15. Una partícula libre de masa m se mueve en el plano xy. Escribir el lagrangiano y las ecuaciones de E-L si se usan como coordenadas generalizadas cada uno de los siguientes conjuntos (mostrados en la figura):

a) Las coordenadas ρ y φ asociadas a ejes cartesianos fijos al origen y que no rotan.

b) Las coordenadas polares ρ_1 y φ_1 asociadas al sistema de ejes x_1 e y_1, cuyo origen coincide con el del sistema xy pero que rota con velocidad angular constante Ω.

c) Las coordenadas polares ρ_2 y φ_2 asociadas al sistema de ejes x_2 e y_2, paralelos a x e y, respectivamente, y cuyo origen se desplaza con velocidad angular constante ω sobre un círculo de radio a centrado en el origen del sistema xy.

d) Las coordenadas polares ρ_3 y φ_3 asociadas al sistema de ejes x_3 e y_3 cuyo origen coincide con el origen del sistema x_2y_2 pero cuya orientación rota con velocidad angular constante Ω. Este es el caso más complicado: antes de escribir las ecuaciones de E-L, vea si el lagrangiano no contiene la derivada total respecto del tiempo de una función de las coordenadas y del tiempo. Esta derivada puede suprimirse sin afectar las ecuaciones de E-L, pero simplificando muchísimo su cálculo.



16. Demostrar que dos lagrangianos L y L^* generan exactamente las mismas ecuaciones de movimiento si y sólo si difieren en una derivada total respecto del tiempo de una función de las coordenadas y del tiempo.

17. Encontrar las ecuaciones de E-L para los lagrangianos

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) - \frac{\omega^2}{2}\left(q_1^2 + q_2^2\right), \qquad L^* = \dot{q}_1\dot{q}_2 - \omega^2 q_1 q_2. \tag{3}$$

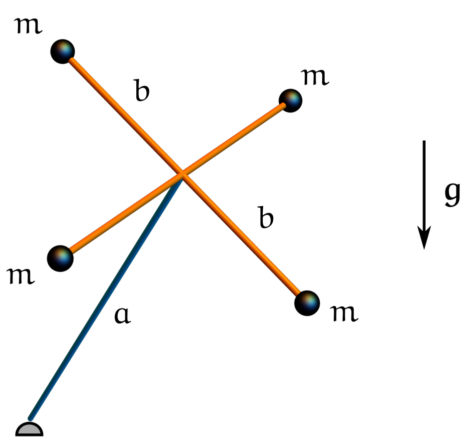
Demostrar, sin embargo, que estos lagrangianos no difieren en una derivada total. ¿Es un contraejemplo del problema anterior?

18. Dados los siguientes lagrangianos

$$\begin{aligned} L_1(q,\dot{q}) &= \frac{1}{12}\dot{q}^4 + \frac{\omega^2}{2}q^2\dot{q}^2 - \frac{\omega^4}{4}q^4, \\ L_2(q,\dot{q}) &= \frac{2\dot{q}}{q}\arctan\left(\frac{\dot{q}}{q}\right) - \log\left(q^2 + \dot{q}^2\right), \end{aligned} \tag{4}$$

mostrar que las soluciones de la ecuaciones de E-L son las mismas que las del lagrangiano de un oscilador armónico. Mostrar, sin embargo, que ni L_1 ni L_2 difieren del lagrangiano de un oscilador armónico en una derivada total de una función de q y t. ¿Es un contraejemplo del problema 16?

19.* Una barra de longitud a tiene un extremo fijo al origen, alrededor del cual puede pivotar sin restricciones. En el otro extremo de la barra se fijan por sus centros un par de barras, perpendiculares entre sí y a la primera barra. Las barras que forman la cruz tienen longitud $2b$. En los extremos de la cruz hay cuatro partículas de masa m. Hay gravedad. Aquí hay una animación.

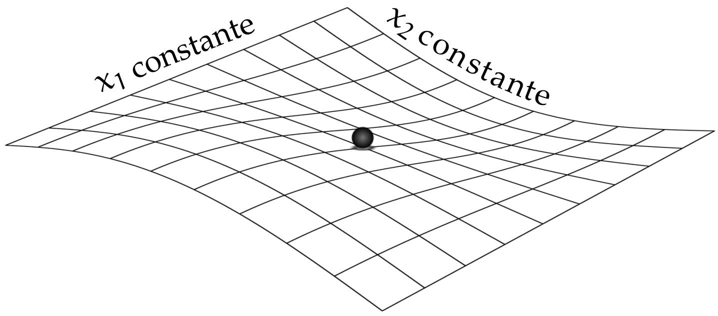


a) Elegir coordenadas generalizadas y escribir la posición de cada partícula. *Ayuda:* piense en el sistema de versores esféricos asociados al centro de la cruz.

b) Escribir el lagrangiano y encontrar las ecuaciones de E-L.

c) Identificar constantes de movimiento y reducir a un problema unidimensional.

20.* **Geodésicas sobre una superficie**. Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre una superficie definida paramétricamente por la función $\mathbf{r}(x_1, x_2)$, de manera que la posición de la partícula queda determinada por las coordenadas x_1 y x_2. No hay fuerzas externas. Aquí hay una animación.



a) Mostrar que la energía cinética de la partícula puede escribirse como

$$T(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x_1, x_2)\, \dot{x}_i \dot{x}_j, \tag{5}$$

y dar las componentes de la matriz g_{ij} en términos de la función $\mathbf{r}(x_1, x_2)$. Comparar con la expresión para el elemento de línea sobre la superficie.

b) Escribir las ecuaciones de E-L para x_1 y x_2 en términos de los elementos de la matriz g_{ij} y de sus derivadas respecto de x_1 y x_2.

c) Mostrar que las ecuaciones de movimiento pueden quedar escritas en la forma

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_{j,k} \Gamma_{ijk}(x_1, x_2)\, \dot{x}_j \dot{x}_k = 0, \tag{6}$$

y dar las funciones Γ_{ijk} en términos de la matriz g_{ij}, de su inversa y de sus derivadas respecto de x_1 y x_2. Esta es la ecuación de las geodésicas y Γ_{ijk} es la conexión métrica.

21.* Habitualmente uno no calcula Γ_{ijk} a partir de su definición, sino que escribe la ecuación de movimiento a partir del lagrangiano y de ahí lee las componentes de Γ. Siguiendo este método, dar las componentes de Γ para las geodésicas en la esfera, usando como coordenadas θ y φ. Verificar que se obtiene el mismo resultado, pero más laboriosamente, a partir de la definición de las componentes de Γ deducida en el problema anterior.