Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

La función h*

Sobre la conservación de h

Dijimos que si $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo, entonces la función h, definida por

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \tag{1}$$

no depende explícitamente del tiempo y además se conserva.

La demostración es sencilla y deberían ser capaces de presentarla en un examen final. En general, la derivada total de $\mathcal{L}$ respecto del tiempo es

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^{N} \left[\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{2}$$

Si $\mathbf{q}(t)$ es solución de las ecuaciones de movimiento, entonces podemos usar la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \tag{3}$$

para reescribir la ec. (2) como

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \stackrel{*}{=} \sum_{i=1}^{N} \left\{ \dot{q}_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] + \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right\} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{4}$$

El asterisco sobre el signo igual está para recordarnos que la igualdad es válida únicamente si las funciones $q_i(t)$ son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Ahora bien, cada término dentro de la suma es una derivada total,

$$\dot{q}_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] + \ddot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{d}{dt}\left[\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right]. \tag{5}$$

Finalmente,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \stackrel{*}{=} \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{6}$$

Agrupando en una misma derivada todas las derivadas totales, resulta

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] \stackrel{*}{=} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{7}$$

*zanellaj@df.uba.ar

El término sobre el que actúa la derivada en el primer miembro recibe el nombre de función h, y depende en general de las coordenadas, de las velocidades y del tiempo,

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{8}$$

El resultado al que arribamos es que las ecuaciones de Euler-Lagrange implican

$$\frac{dh}{dt} \overset{*}{=} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \tag{9}$$

Luego, si $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo h se conserva. Es más, por la forma en la que se ha construido, h tampoco es una función explícita del tiempo. En efecto, en la ec. (8), la única manera de que h adquiera una dependencia explícita con el tiempo es que $\mathcal{L}$ dependa explícitamente del tiempo.

Es un paso fundamental en la demostración anterior el uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Esas ecuaciones son únicamente válidas para soluciones de las ecuaciones de movimiento. La conservación de h no quiere decir que la función $h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ sea una constante. Quiere decir que cuando h se evalúa sobre funciones del tiempo que son soluciones de las ecuaciones de movimiento, entonces es una constante. Asimismo, la ec. (9) sólo es válida cuando ambos miembros están evaluados sobre soluciones de las ecuaciones de movimiento.

El hecho de que la función h dependa de las coordenadas y las velocidades permite leer la ecuación de conservación

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C \tag{10}$$

como una ecuación diferencial de primer grado. Una de las ecuaciones de Euler-Lagrange (que son de segundo grado) puede reemplazarse por la ecuación anterior. La función h suele ser la base para construir problemas efectivos con un número menor de grados de libertad.

Acerca de los casos en los que $h = T + V$

Afirmamos que si T es una función homogénea de segundo grado en las velocidades generalizadas y V no depende de ellas, entonces h es la energía mecánica total. La condición de homogeneidad significa que

$$T(\mathbf{q}, \lambda\dot{\mathbf{q}}, t) = \lambda^2 T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{11}$$

El teorema de las funciones homogéneas de Euler dice que si $f(\mathbf{x})$ es homogénea de grado n, es decir, si

$$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^n f(\mathbf{x}), \tag{12}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = n f(\mathbf{x}). \tag{13}$$

Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = x^2 e^{x/y} \tag{14}$$

es evidentemente homogénea de grado dos. Por otro lado tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} f + \frac{f}{y}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} f. \tag{16}$$

y se verifica el teorema de Euler:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f + x\frac{f}{y} - y\frac{x}{y^2} f = 2f. \tag{17}$$

Aplicado a un lagrangiano cuya energía cinética sea una función homogénea de grado dos en las velocidades y cuyo potencial no dependa de ellas este teorema implica

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 2T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{18}$$

Luego,

$$h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 2T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + V(\mathbf{q}, t) \equiv \mathcal{E}, \tag{19}$$

tal como queríamos demostrar. Observen que este resultado es independiente de la conservación o no de la función h.

El argumento de la persona que pasaba por casualidad

Para el problema de la partícula en un aro vertical que está forzado a rotar con velocidad angular constante $\mathbf{\Omega} = \Omega\hat{z}$, obtuvimos el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L}(\alpha, \dot{\alpha}) = \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\mu + \sin^2\alpha\right)\Omega^2 + \cos\varphi. \tag{20}$$

En realidad, como habíamos adimensionalizado todo, el Ω que figura aquí es Ω/ω, donde $\omega^2 = g/a$. La cuestión es que nosotros, que resolvimos el problema desde el comienzo, sabemos que la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\mu + \sin^2\alpha\right)\Omega^2, \tag{21}$$

y la energía potencial es

$$V = -\cos\varphi. \tag{22}$$

Como el lagrangiano no depende del tiempo, h se conserva. Pero como la energía cinética no es homogénea de grado dos en $\dot{\alpha}$, h no es la energía mecánica. Para ver qué cosa es h, tuvimos que calcularla explícitamente:

$$h = \dot{\alpha}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\alpha}} - \mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}^2 - \tfrac{1}{2}\left(\mu + \sin^2\alpha\right)\Omega^2 - \cos\varphi. \tag{23}$$

El cálculo es mínimo pero hubo que hacerlo.

Aquí es donde entra la persona que pasaba por casualidad. Esta persona sólo ve el lagrangiano escrito en el pizarrón,

$$\mathcal{L}(\alpha, \dot{\alpha}) = \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}^2 + \tfrac{1}{2}\left(\mu + \sin^2\alpha\right)\Omega^2 + \cos\varphi. \tag{24}$$

Como no conoce el contexto completo, no puede decir con seguridad qué parte corresponde a la energía cinética y qué parte corresponde a la energía potencial. Pero si tuviera que decidirse por alguna opción, lo más natural es que diga que la energía cinética es

$$\tilde{T} = \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}^2, \tag{25}$$

y que la energía potencial es

$$\tilde{V} = -\tfrac{1}{2}\left(\mu + \sin^2\alpha\right)\Omega^2 - \cos\varphi. \tag{26}$$

Para esta persona, el lagrangiano es tan independiente del tiempo como para nosotros, de manera que igual que nosotros dirá que la función h se conserva. Pero, a diferencia de nosotros, que no conocíamos el argumento de la persona que pasaba por casualidad, esta persona puede escribir h de manera inmediata, porque según ella la energía cinética sí es una función homogénea de grado dos en las velocidades. Según esta persona, h es lo que ella definiría como la energía mecánica:

$$h = \tilde{T} + \tilde{V} = \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}^2 - \tfrac{1}{2}\left(\mu + \sin^2\alpha\right)\Omega^2 - \cos\varphi. \tag{27}$$

Su desconocimiento de los detalles del problema hace que esta persona pueda escribir la función h sin tener que calcular nada. Su desconocimiento de los detalles del problema le dictará que no es prudente juzgar sobre si esta función h es verdaderamente la energía mecánica. Es la función h, se conserva y con eso alcanza.

La clave del asunto está en que si un lagrangiano tiene el aspecto de ser

$$\mathcal{L} = \tilde{T} - \tilde{V} \tag{28}$$

con $\tilde{T}$ homogénea de grado dos en la velocidades y $\tilde{V}$ independiente de ellas, entonces la función h es automáticamente

$$h = \tilde{T} + \tilde{V}. \tag{29}$$

No importa si $\tilde{T}$ y $\tilde{V}$ son en verdad la energía cinética y la energía potencial. Basta con que puedan serlo.

En general, si $\mathcal{L}$ puede escribirse del siguiente modo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_0, \tag{30}$$

donde cada $\mathcal{L}_i$ es una función homogénea de grado i en las velocidades, entonces

$$h = \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_0. \tag{31}$$

La demostración de este resultado figura en la guía siguiente, pero nada les impide demostrarlo ahora mismo.