Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Algunos comentarios sobre los problemas de simetrías y leyes de conservación.[*]

1. "A la Landau"

En los primeros problemas sobre simetrías, el lagrangiano es invariante ante una dada transformación y se pide encontrar la constante de movimiento asociada siguiendo dos métodos: i) por aplicación directa del teorema de Noether, ii) a la Landau. El teorema de Noether tiene una expresión general que no siempre es fácil recordar. El método de Landau es una demostración caso por caso del teorema de Noether. Tiene la limitación de que sólo es aplicable si $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t$. El método consiste en tres pasos:

1) Formalización de la simetría del lagrangiano.

2) Desarrollo hasta primer orden en el parámetro de la transformación.

3) Aplicación de las ecuaciones de E-L.

La conclusión de estos tres pasos es la constante de movimiento. La ventaja del método "a la Landau" es que no es necesario recordar el enunciado del teorema de Noether. No es muy simpático pedir en un parcial que apliquen maquinalmente el teorema de Noether, pero sí es razonable pedirles que encuentren las constantes de movimiento a la Landau. La lógica de este método es la misma que se aplica para demostrar el teorema de Noether, así que si entienden el método de Landau no debería resultarles difícil entender la demostración del teorema de Noether en el caso más general, siempre en el contexto de la mecánica clásica. Para entender el método de Landau, lo mejor es presentar unos cuantos ejemplos, empezando por el caso más simple de una transformación de traslación de una sola de las coordenadas generalizadas.

[*]zanellaj@df.uba.ar

1.1. Simetría de traslación

Supongamos que la transformación que deja invariante al lagrangiano es una traslación de la coordenada q_1. Esto no necesariamente representa una traslación rígida del sistema. La coordenada q_1 puede ser un ángulo o cualquier otra cosa. El primer paso es formalizar el enunciado acerca de que el lagrangiano es invariante ante una traslación de q_1:

$$L(q_1 + \epsilon, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t) = L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t). \tag{1}$$

Se entiende que la igualdad vale hasta orden ϵ. Consecuentemente, el segundo paso consiste en expandir el miembro de la izquierda hasta primer orden en ϵ. Entonces la ecuación anterior se lee así:

$$L(q_1, q_2, \ldots) + \epsilon \frac{\partial L}{\partial q_1}(q_1, q_2, \ldots) = L(q_1, q_2, \ldots). \tag{2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0. \tag{3}$$

En el tercer paso, uno asume que $\mathbf{q}(t)$ es solución de las ecuaciones de movimiento, entonces la ecuación anterior junto con la ecuación de E-L para q_1 implican

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) \overset{*}{=} 0, \tag{4}$$

entonces la cantidad definida por

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = p_1 \tag{5}$$

es una constante de movimiento. El asterisco sobre el signo igual en la Ec. (4) significa que la ecuación es válida bajo la hipótesis de que $\mathbf{q}(t)$ es solución de las ecuaciones de E-L.

Es correcto que hayamos identificado la cantidad conservada con el impulso generalizado p_1, pero, formalmente, la ley de conservación debe expresar que cierta función de las coordenadas, de las velocidades y del tiempo es constante sobre las trayectorias que satisfacen las ecuaciones de E-L. Deberíamos ser más explícitos y decir que la cantidad conservada es la función definida por

$$p_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{6}$$

Este caso es trivial pero muestra cuál es la idea del método: en lugar de aplicar la fórmula del teorema de Noether, que mal puede uno recordar si no la practica con frecuencia, uno encuentra la constante de movimiento problema por problema en tres pasos: primero, expresando formalmente lo que significa la invariancia del lagrangiano; segundo, expandiendo esa expresión hasta primer orden en ϵ; y tercero, viendo cuáles son las consecuencias de que $\mathbf{q}$ satisfaga las ecuaciones de E-L.

El mismo problema resuelto "a la Noether" requiere, antes que nada, que expresemos la transformación en la siguiente forma:

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \epsilon \boldsymbol{\eta}, \qquad t' = t + \epsilon\theta. \tag{7}$$

En el caso de la traslación según q_1,

$$q_i' = q_i + \epsilon\delta_{1i}, \qquad t' = t. \tag{8}$$

Es decir $\eta_i = \delta_{1i}$ y $\theta = 0$. El teorema de Noether asegura que se conserva la siguiente función

$$C = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p} - \theta h. \tag{9}$$

En nuestro caso resulta

$$C = \sum_{i=1}^{n} \delta_{1i} p_i = p_1. \tag{10}$$

Una observación importante acerca del método de Landau es que aun cuando uno tiene un lagrangiano en particular, que posee cierta simetría, el primer paso es formalizar esa simetría para un lagrangiano genérico, no para el lagrangiano particular. Tenemos, por ejemplo, un lagrangiano que no depende de x, e identificamos la simetría de traslación en x. Pero para avanzar con el método de Landau, explícitamente escribimos un lagrangiano que tiene a x entre sus variables, y decimos

$$L(x + \epsilon, \dot{x}, t) = L(x, \dot{x}, t). \tag{11}$$

1.2. Simetría de rotación

El siguiente ejemplo es menos trivial. Hay una sola partícula y las coordenadas generalizadas son las tres coordenadas cartesianas. Supongamos que el lagrangiano es invariante frente a rotaciones infinitesimales alrededor del eje z, es decir, frente a las siguientes transformaciones,

$$x' = x - \epsilon y, \qquad y' = y + \epsilon x, \qquad z' = z, \qquad t' = t. \tag{12}$$

Esta es la versión infinitesimal de la transformación de rotación alrededor del eje z, que en general se escribe como

$$x' = x \cos\alpha - y \sin\alpha, \qquad y' = x \sin\alpha + y\cos\alpha, \qquad z' = z. \tag{13}$$

De acuerdo a las Ecs. (12),

$$\dot{x}' = \dot{x} - \epsilon\dot{y}, \qquad \dot{y}' = \dot{y} + \epsilon\dot{x}, \qquad \dot{z}' = \dot{z}. \tag{14}$$

Ahora vayamos paso por paso. Primer paso: la invariancia del lagrangiano significa que

$$L(x - \epsilon y, y + \epsilon x, z, \dot{x} - \epsilon \dot{y}, \dot{y} + \epsilon \dot{x}, \dot{z}, t) = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t). \tag{15}$$

Segundo paso: expandiendo el miembro de la izquierda hasta primer orden en ϵ, resulta

$$-y\frac{\partial L}{\partial x} + x\frac{\partial L}{\partial y} - \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0. \tag{16}$$

Tercer paso: si estamos sobre una solución de las ecuaciones de E-L, entonces la ecuación anterior puede leerse como

$$-y\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + x\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \overset{*}{=} 0. \tag{17}$$

Ahora hay que obtener las consecuencias de esta ecuación. Asociando términos, vemos que el miembro de la derecha es una derivada total,

$$\frac{d}{dt}\left(-y\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + x\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) \overset{*}{=} 0. \tag{18}$$

Lo que implica, en definitiva, que se conserva la siguiente cantidad

$$\ell = x\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - y\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = xp_y - yp_x. \tag{19}$$

Resuelto "a la Noether", a partir de las Ecs. (12) tenemos que las funciones $\boldsymbol{\eta}$ y θ que definen la transformación en la Ec. (7) son

$$\eta_x = -y, \qquad \eta_y = x, \qquad \eta_z = 0, \qquad \theta = 0. \tag{20}$$

Luego, la cantidad que se conserva es

$$C = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p} - \theta h = -yp_x + xp_y. \tag{21}$$

Así parece más sencillo, pero uno depende de recordar las varias definiciones que entran en el teorema de Noether. El método de Landau es pura lógica.

1.3. La integral de Jacobi (problema 9)

El caso de la integral de Jacobi del problema 9 involucra una transformación que afecta al tiempo. En coordenadas cilíndricas, la forma funcional más general de un potencial que rota alrededor del eje z con velocidad angular constante ω es

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\rho, \varphi - \omega t, z). \tag{22}$$

El lagrangiano será

$$L(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(\rho, \varphi - \omega t, z). \tag{23}$$

El potencial es invariante frente a la transformación

$$\varphi' = \varphi + \epsilon\omega, \qquad t' = t + \epsilon. \tag{24}$$

Puesto que las velocidades no se ven afectadas, la energía cinética también es invariante. Luego, el propio lagrangiano es invariante.

Ahora vamos paso por paso. Primer paso: la invariancia del lagrangiano significa que

$$L(\rho, \varphi + \epsilon\omega, z, \dot\rho, \dot\varphi, \dot z, t + \epsilon) = L(\rho, \varphi, z, \dot\rho, \dot\varphi, \dot z, t). \tag{25}$$

Notar que no estamos verificando simplemente la simetría del lagrangiano de la Ec. (23). Estamos expresando la simetría para un lagrangiano genérico. Segundo paso: expandiendo hasta orden ϵ, la ecuación anterior implica

$$\omega\frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{26}$$

Tercer paso: si estamos sobre soluciones de las ecuaciones de movimiento, resulta

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} \overset{*}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right), \qquad \frac{\partial L}{\partial t} \overset{*}{=} -\frac{dh}{dt}. \tag{27}$$

Finalmente,

$$\frac{d}{dt}\left(\omega\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} - h\right) \overset{*}{=} 0. \tag{28}$$

La energía es igual a h, y la derivada de L con respecto a $\dot\varphi$ es el momento angular en la dirección z. La expresión anterior significa que se conserva la siguiente cantidad

$$J = \mathcal{E} - \omega L_z. \tag{29}$$

Esta es la integral de Jacobi, de extendida aplicación en el problema restringido de tres cuerpos. La expresión (29) es informativa, pero a los efectos de resolver las ecuaciones de movimiento no dice nada. Para que tenga alguna utilidad, debemos escribir explícitamente J como una función de las coordenadas, de las velocidades y del tiempo:

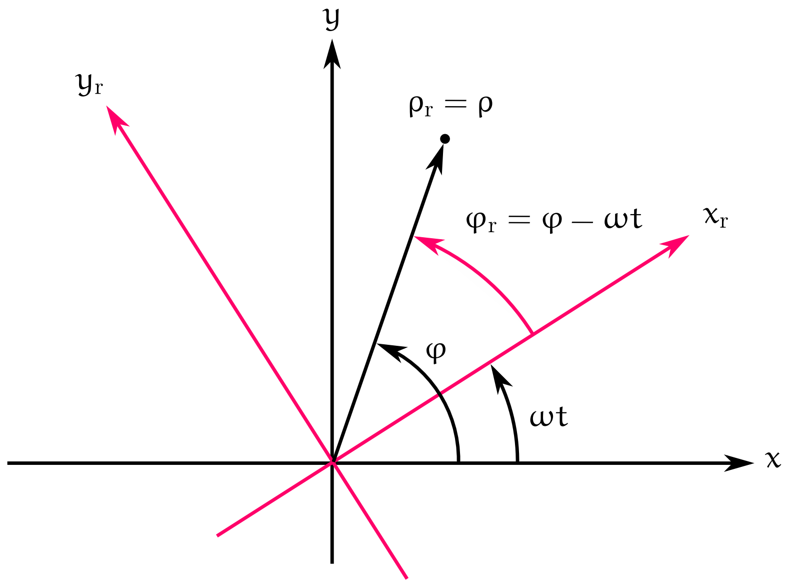
$$J(\rho, \varphi, z, \dot\rho, \dot\varphi, \dot z, t) = \tfrac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + U(\rho, \varphi - \omega t, z) - \omega m \rho^2 \dot\varphi. \tag{30}$$

Es interesante escribir esta función en términos de las coordenadas cilíndricas de un sistema que rota junto con el potencial. Si los dos sistemas de ejes coinciden en $t = 0$, como muestra la figura de la página siguiente, estas coordenadas están relacionadas con las del sistema de ejes fijos del siguiente modo:

$$\rho_r = \rho, \qquad \varphi_r = \varphi - \omega t, \qquad z_r = z. \tag{31}$$

De forma que obtenemos

$$\begin{aligned} J &= \tfrac{1}{2}m\left[\dot\rho_r^2 + \rho_r^2\left(\dot\varphi_r^2 + \omega^2 + 2\omega\dot\varphi_r\right) + \dot z_r^2\right] + U(\rho_r, \varphi_r, z) - \omega m \rho_r^2(\dot\varphi_r + \omega) \\ &= \tfrac{1}{2}m\left(\dot\rho_r^2 + \rho_r^2\dot\varphi_r^2 + \dot z_r^2\right) + U(\rho_r, \varphi_r, z) - \tfrac{1}{2}m\omega^2\rho_r^2. \end{aligned} \tag{32}$$



Cambiemos el punto de vista. El lagrangiano escrito en las coordenadas del sistema rotante es

$$\tilde L(\rho_r, \varphi_r, z_r, \dot\rho_r, \dot\varphi_r, \dot z_z) = \tfrac{1}{2}m\Big[\dot\rho_r^2 + \rho_r^2(\dot\varphi_r^2 + \omega^2 + 2\omega\dot\varphi_r) + \dot z_r^2\Big] - U(\rho_r, \varphi_r, z). \tag{33}$$

Para obtener esta expresión no hicimos otra cosa que tomar el lagrangiano original de la Ec. (23) y escribir todas las coordenadas y velocidades del sistema fijo en función de las coordenadas y velocidades del sistema rotante. Es un cambio de variables ordinario aplicado a una función escalar. Ahora bien, el lagrangiano (33) no depende del tiempo, de modo que se conserva la función $\tilde h$. No hay que andar buscando ninguna simetría extraña. Usando el resultado del problema 6, que nos ahorra tantísimas cuentas, en este caso es

$$\tilde h = \tfrac{1}{2}m\left(\dot\rho_r^2 + \rho_r^2\dot\varphi_r^2 + \dot z_r^2\right) + U(\rho_r, \varphi_r, z) - \tfrac{1}{2}m\omega^2\rho_r^2. \tag{34}$$

Vemos que $\tilde h$ coincide con la constante J dada por la Ec. (32).

Resumiendo: en un sistema tenemos una transformación de simetría que involucra al tiempo y al ángulo φ. En ese sistema se conserva J, que es, para nosotros, una nueva constante de movimiento fuera de las ya conocidas. En el sistema que rota con el potencial, el lagrangiano tiene simetría de traslación temporal. De modo que se conserva $\tilde h$, que es una de las constantes que ya manejábamos. Finalmente, descubrimos que J no es otra cosa que $\tilde h$. Dos lagrangianos, dos simetrías, pero la misma ley de conservación. Esto es nada más que una coincidencia. Usando distintos conjuntos de coordenadas generalizadas uno aumenta las probabilidades de encontrar constantes de movimiento independientes.

Resuelto "a la Noether", tenemos que la transformación

$$\rho' = \rho, \qquad \varphi' = \varphi + \epsilon\omega, \qquad z' = z, \qquad t' = t + \epsilon \tag{35}$$

corresponde a las funciones $\boldsymbol{\eta}$ y θ del teorema de Noether dadas por

$$\eta_\rho = 0, \qquad \eta_\varphi = \omega, \qquad \eta_z = 0, \qquad \theta = 1. \tag{36}$$

La cantidad conservada es

$$C = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p} - \theta h = \omega p_\varphi - h = \omega L_z - \mathcal{E} = -J. \tag{37}$$

Una nota al margen, en relación a los sistemas no inerciales. El lagrangiano de la Ec. (33) es $T - V$, donde T y V son cantidades que corresponden al sistema de referencia inercial, solamente que escritas usando las coordenadas naturales del sistema no inercial. Pero a partir de este lagrangiano se deducen las ecuaciones de movimiento en el sistema de referencia no inercial, es decir, las ecuaciones que satisfacen las coordenadas naturales del sistema de referencia no inercial. La conclusión es que $\tilde{L}$ debe ser el lagrangiano escrito según el sistema de referencia no inercial:

$$\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{V}, \tag{38}$$

donde, por definición, la energía cinética medida en el sistema de referencia no inercial es

$$\tilde{T} = \tfrac{1}{2} m \left(\dot{\rho}_r^2 + \rho_r^2 \dot{\varphi}_r^2 + \dot{z}_r^2 \right). \tag{39}$$

Los otros términos que aparecen en la Ec. (33) definen el potencial en el sistema de referencia no inercial, lo que incluye el potencial centrífugo y el de Coriolis:

$$\tilde{V} = U(\rho_r, \varphi_r, z_r) - \tfrac{1}{2} m \rho_r^2 (\omega^2 + 2\omega\dot{\varphi}_r). \tag{40}$$

Escribir las ecuaciones de Newton en un sistema no inercial corresponde a agregar fuerzas de inercia. Es más sencillo recordar las expresiones de estas fuerzas que recordar los potenciales a partir de los cuales se deducen estas fuerzas. La cuestión es que no es necesario recordar los potenciales ni las fuerzas. Basta con escribir el lagrangiano en un sistema inercial usando la coordenadas naturales del sistema no inercial. Automáticamente obtendremos las ecuaciones de movimiento correctas en las coordenadas naturales del sistema no inercial. Esto da un método para deducir los potenciales asociados a las fuerzas de inercia en el sistema no inercial, sin necesidad de tener que acordarse de nada. Lo único que se requiere es saber escribir la relación entre los dos conjuntos de coordenadas generalizadas.

2. Simetrías a distintos niveles de descripción

2.1. Simetrías del lagrangiano

Hasta ahora hemos visto transformaciones que dejan invariante al lagrangiano. Esta clase de transformaciones es bastante limitada. Está restringida a transformaciones de la forma

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \qquad t' = t + \epsilon\theta. \tag{41}$$

En la última ecuación, θ es efectivamente una constante, no una función de $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ y t. Las ecuaciones anteriores determinan la siguiente transformación para las velocidades:

$$\dot{\mathbf{q}}' = \frac{d\mathbf{q}'}{dt'} = \frac{1}{dt'/dt}\frac{d\mathbf{q}'}{dt} = \dot{\mathbf{q}} + \epsilon\dot{\boldsymbol{\eta}}. \tag{42}$$

La simetría del lagrangiano se expresa formalmente como

$$L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \tag{43}$$

donde se entiende que la igualdad es válida hasta orden ϵ. Escribiendo explícitamente las nuevas variables en términos de las antiguas, tenemos

$$L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') = L(\mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{q}} + \epsilon\dot{\boldsymbol{\eta}}, t + \epsilon\theta). \tag{44}$$

Expandiendo hasta orden ϵ, la Ec. (43) implica

$$\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{45}$$

Si estamos sobre soluciones de las ecuaciones de E-L, ocurren dos cosas:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \overset{*}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right), \qquad \frac{\partial L}{\partial t} \overset{*}{=} -\frac{dh}{dt}. \tag{46}$$

En tal caso, la Ec. (45) se lee como

$$\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) + \dot{\boldsymbol{\eta}}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \theta\frac{dh}{dt} \overset{*}{=} 0. \tag{47}$$

Como siempre, el asterisco sobre el signo igual nos recuerda que la ecuación es válida si $\mathbf{q}(t)$ es solución de las ecuaciones de E-L. Asociando términos y teniendo en cuenta que θ es constante, queda

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \theta h\right) \overset{*}{=} 0. \tag{48}$$

Obtenemos así que la cantidad entre paréntesis es una constante de movimiento:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \theta h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \tag{49}$$

tal que

$$\frac{d}{dt}C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) \overset{*}{=} 0. \tag{50}$$

Esto es, en esencia, la generalización del método de Landau.

Todos los problemas hasta el problema 10 presentan leyes de conservación de este tipo. Pero si uno revisa la deducción que hemos hecho, puede notar que si en lugar de ser $L(\mathbf{q}',\dot{\mathbf{q}}',t')$ estrictamente igual a $L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)$, fuera

$$L(\mathbf{q}',\dot{\mathbf{q}}',t') = L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) + \epsilon\frac{d}{dt}F(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t), \tag{51}$$

entonces es posible sacar casi las mismas conclusiones. En primer lugar, expandiendo hasta orden ϵ, la Ec. (51) implica

$$\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\partial L}{\partial\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\eta}}\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}} + \theta\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{dF}{dt} = 0. \tag{52}$$

En segundo lugar, si valen las ecuaciones de E-L, hay que hacer las mismas sustituciones de antes, pero en lugar de llegar al resultado (48) llegamos a esta generalización:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}} - \theta h - F\right) \overset{*}{=} 0, \tag{53}$$

de manera que la cantidad conservada es ahora

$$C(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t)\cdot\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) - \theta h(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) - F(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t). \tag{54}$$

Cuando F es distinta de cero, se dice que la transformación es una cuasisimetría del lagrangiano. Uno de los ejemplos más simples es el de las transformaciones de Galileo. La versión finita de las transformaciones de Galileo es

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}t, \qquad t' = t, \tag{55}$$

donde $\mathbf{v}$ es una constante. En la versión infinitesimal, $\mathbf{v} = \epsilon\hat{\mathbf{v}}$, es decir,

$$\boldsymbol{\eta} = \epsilon t\hat{\mathbf{v}}, \qquad \theta = 0. \tag{56}$$

El lagrangiano evaluado en las nuevas variables es

$$L(\mathbf{r}',\dot{\mathbf{r}}',t') = L(\mathbf{r} + \epsilon\hat{\mathbf{v}}, \dot{\mathbf{r}} + \epsilon\hat{\mathbf{v}}, t). \tag{57}$$

En el caso concreto de una partícula libre,

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2, \tag{58}$$

y la Ec. (57) implica

$$L(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \epsilon m\hat{\nu} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \tag{59}$$

Los lagrangianos no son iguales, pero la diferencia es una derivada total,

$$L(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \epsilon \frac{d}{dt}(m\hat{\nu} \cdot \mathbf{r}) = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) + \epsilon \frac{dF(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)}{dt}, \tag{60}$$

donde $F(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = m\hat{\nu} \cdot \mathbf{r}$. La cantidad conservada es

$$C = \boldsymbol{\eta} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - F = t\hat{\nu} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - m\hat{\nu} \cdot \mathbf{r} = m\hat{\nu} \cdot (t\dot{\mathbf{r}} - \mathbf{r}). \tag{61}$$

Puesto que $\hat{\nu}$ un versor arbitrario, tenemos tres constantes de movimiento. Dejando de lado la masa, que es constante, se conserva la siguiente cantidad vectorial

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - t\dot{\mathbf{r}}. \tag{62}$$

De la conservación del momento lineal, sabemos que $\dot{\mathbf{r}}$ también es constante, de manera que la ecuación anterior no es otra cosa que la ecuación para la evolución de $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{R} + t\dot{\mathbf{r}}. \tag{63}$$

El vector constante $\mathbf{R}$ es la posición de la partícula en $t = 0$. En el problema 13 vuelve a aparecer la idea de que las constantes de movimiento están relacionadas con las condiciones iniciales.

2.2. Simetrías de la acción

2.2.1. Motivación

Hasta ahora vimos simetrías del lagrangiano. Las transformaciones estuvieron restringidas a las del tipo

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \qquad t' = t + \epsilon\theta, \tag{64}$$

con θ constante, lo que nos permitió estudiar transformaciones que incluyeran traslaciones en el tiempo, pero no mucho más.

Analicemos lo que sucede cuando tratamos de encontrar leyes de conservación asociadas a transformaciones más generales dadas por

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \qquad t' = t + \epsilon\theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{65}$$

Es decir, a diferencia de lo hecho hasta aquí, permitimos que θ sea una función cualquiera, en lugar de ser meramente una constante. Una primera consecuencia es que la manera en que transforma la velocidad es un poco más complicada que antes,

$$\dot{\mathbf{q}}' = \frac{d\mathbf{q}'}{dt'} = \frac{1}{dt'/dt}\frac{d\mathbf{q}'}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{q}} + \epsilon\dot{\boldsymbol{\eta}}}{1+\epsilon\dot{\theta}} = \dot{\mathbf{q}} + \epsilon(\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\theta}\dot{\mathbf{q}}), \tag{66}$$

donde la última igualdad vale a orden ϵ. La deducción de la Ec. (45) se ve alterada mínimamente. No deberían tener problema en verificar que ahora la condición

$$L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{67}$$

se lee como

$$\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + (\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\theta}\dot{\mathbf{q}})\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \tag{68}$$

Si se satisfacen las ecuaciones de E-L, algunos términos se asocian formando la derivada total de un producto. Por otro lado, $\partial L/\partial t \overset{*}{=} -dh/dt$. En definitiva, la simetría del lagrangiano más las ecuaciones de E-L implican

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \dot{\theta}\dot{\mathbf{q}}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \theta\frac{dh}{dt} \overset{*}{=} 0, \tag{69}$$

Notando que

$$\dot{\mathbf{q}}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = h + L, \tag{70}$$

podemos reescribir la Ec. (69) como

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \dot{\theta}L - \dot{\theta}h - \theta\frac{dh}{dt} \overset{*}{=} 0. \tag{71}$$

Vuelve a formarse la derivada total de un producto, pero algo sobra:

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \theta h\right) - \dot{\theta}L \overset{*}{=} 0. \tag{72}$$

A menos que θ sea constante, aquí no tenemos forma de escribir una ecuación de conservación. La relación (67) entre los lagrangianos no conduce a ningún resultado útil. Habría que encontrar la manera de redefinir la condición de simetría de modo que el término $\dot{\theta}L$ desaparezca de la Ec. (72).

Afortunadamente, la solución es bastante simple. La Ec. (68) proviene de desarrollar hasta orden ϵ la función

$$L\Big(\mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{q}} + \epsilon(\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\theta}\dot{\mathbf{q}}), t + \epsilon\theta\Big). \tag{73}$$

¿Cómo podemos modificar esta expresión para que aparezca un término de la forma $\epsilon\dot{\theta}L$ que cancele al término que sobra en la Ec. (72)? Lo más sencillo es multiplicar la expresión anterior por $1 + \epsilon\dot{\theta}$,

$$L\Big(\mathbf{q}+\epsilon\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{q}}+\epsilon(\dot{\boldsymbol{\eta}}-\dot{\theta}\dot{\mathbf{q}}), t+\epsilon\theta\Big)(1+\epsilon\dot{\theta}) = L\Big(\mathbf{q}+\epsilon\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{q}}+\epsilon(\dot{\boldsymbol{\eta}}-\dot{\theta}\dot{\mathbf{q}}), t+\epsilon\theta\Big) + \epsilon\dot{\theta}L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{74}$$

Como siempre, la igualdad vale a orden ϵ. Si redefinimos la condición de simetría como

$$L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')(1 + \epsilon\dot{\theta}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \tag{75}$$

el término $\dot{\theta}L$ en la Ec. (72) desaparece, y obtenemos entonces la conservación de la siguiente cantidad:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{76}$$

El término $1 + \epsilon\dot{\theta}$ es igual a dt'/dt, de modo que la conclusión anterior puede pensarse como resultado de la condición de "simetría"

$$L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')\frac{dt'}{dt} = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{77}$$

Esta condición puede parecer arbitraria, definida únicamente para salvar la ley de conservación ante transformaciones del tiempo más generales. ¿Por qué los lagrangianos habrían de estar relacionados de esa manera? ¿Hay algún significado especial en la condición anterior o daría lo mismo que fuera cualquier cosa con tal de salvar la ley de conservación?

2.2.2. Interpretación

Podríamos detenernos aquí. Con esto nos alcanza para obtener la ley de conservación. Pero sería preferible tener una interpretación de la Ec. (77). La presencia del factor dt'/dt es propia de un cambio de variable de integración. Para poner de manifiesto este cambio de variable, integremos la Ec. (77) entre tiempos arbitrarios t_1 y t_2. Así resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')\frac{dt'}{dt} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{78}$$

Todas las funciones en el primer miembro se consideran funciones de t. Si en el primer miembro cambiamos de variable de integración de t a t', resulta

$$\int_{t_1'}^{t_2'} dt'\, L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t') = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \tag{79}$$

donde t_1' y t_2' están relacionados con t_1 y t_2 a partir de la segunda Ec. (65), y donde ahora todas las funciones en el primer miembro se consideran funciones de t'. La igualdad anterior es una igualdad entre las acciones de dos trayectorias distintas:

$$S[\mathbf{q}'] = S[\mathbf{q}]. \tag{80}$$

Esta ecuación expresa la invariancia de la acción cuando la trayectoria $\mathbf{q}(t)$ es transformada en la trayectoria $\mathbf{q}'(t')$ según las definiciones de la Ec. (65). La forma en la que hemos llegado a una condición que involucra las propiedades de transformación de la acción no tiene importancia. Lo que hicimos fue arreglar las cosas sobre la marcha para seguir obteniendo un teorema de conservación luego de generalizar la transformación del tiempo. Que ese procedimiento nos condujera a la simetría de la acción es un resultado hasta cierto punto inesperado. Podríamos habernos detenido en la Ec. (77), a los efectos prácticos no necesitamos saber otra cosa. Sin embargo, resulta más satisfactorio pensar la condición (77) en términos de la invariancia de la acción y no en términos de una propiedad más o menos complicada del lagrangiano construida sólo con la intención de salvar la ley de conservación. Hay un paso que falta, y es que en realidad lo que demostramos es que la Ec. (77) implica la invariancia de la acción. Falta ver que la condición de simetría (80) implica asimismo la Ec. (77). Para poder decir que una simetría de la acción implica una ley de conservación necesitamos ese resultado.

3. El teorema de Noether en mecánica clásica

El asunto principal es demostrar que la invariancia de la acción implica la validez de la Ec. (77). A partir de ahí la ley de conservación se deduce de la misma manera que antes. Entonces, en lugar de avanzar a los tropiezos tratando de arreglar las cosas al nivel del lagrangiano, partimos directamente de la condición de simetría para la acción, sin ningún motivo aparente.

Se define una trayectoria transformada $\mathbf{q}'(t')$ especificando por separado $\mathbf{q}'$ y t' de manera paramétrica. La transformación es infinitesimal y continua:

$$\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \epsilon \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \qquad t' = t + \epsilon\theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{81}$$

Aunque escritas en términos de t, las coordenadas $\mathbf{q}'$ deben ser consideradas funciones de t'. Hasta orden ϵ, las velocidades transforman como

$$\frac{d\mathbf{q}'}{dt'} = \frac{\dot{\mathbf{q}}' + \epsilon\dot{\boldsymbol{\eta}}}{1 + \epsilon\dot{\theta}} = \dot{\mathbf{q}} + \epsilon(\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{q}}\dot{\theta}). \tag{82}$$

La acción para la trayectoria original es

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{83}$$

Por otro lado, la acción para la trayectoria transformada es

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} dt'\, L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t'). \tag{84}$$

Decimos que la transformación es de simetría, ahora hablando al nivel de la acción, si $S = S'$ para cualquier trayectoria $\mathbf{q}(t)$.

Ahora bien, cambiando la variable de integración de t' a t,

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')\frac{dt'}{dt}. \tag{85}$$

Dada la arbitrariedad en la elección de t_1 y t_2, para que la acción sea invariante para cualquier trayectoria, es decir, para que $S' = S$, debe ser

$$L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')\frac{dt'}{dt} = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{86}$$

Esto es lo que queríamos demostrar: la acción es invariante si y sólo si se cumple la condición anterior.

Explícitamente, la acción es invariante si

$$L\Big(\mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{q}} + \epsilon(\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{q}}\dot{\theta}), t + \epsilon\theta\Big)(1 + \epsilon\dot{\theta}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{87}$$

Se entiende que la igualdad es válida hasta primer orden en ϵ. En los primeros problemas sobre simetrías, la invariancia era al nivel del lagrangiano, aquí es al nivel de la acción. Pero rápidamente se reduce a una condición al nivel del lagrangiano. Una simetría del lagrangiano es siempre una simetría de la acción, pero no ocurre a la inversa. La acción puede ser invariante y el lagrangiano puede transformar de acuerdo a la Ec. (86) con $dt'/dt \neq 1$.

Como veremos enseguida, la condición (86) puede relajarse sin alterar la conclusión principal del teorema. Lo que haremos es sumar al miembro de la derecha una derivada total respecto del tiempo de una función de $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ y t,

$$L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}', t')\frac{dt'}{dt} = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \epsilon\frac{d}{dt}F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{88}$$

En tal caso se habla de una cuasisimetría de la acción. En lugar de ser $S' = S$, es

$$S' = S + \epsilon F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{89}$$

En lo que sigue, por simetría entenderemos tanto una simetría en el sentido estricto como una cuasisimetría. Explícitamente,

$$L\Big(\mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{q}} + \epsilon(\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{q}}\dot{\theta}), t + \epsilon\theta\Big)(1 + \epsilon\dot{\theta}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \epsilon\frac{d}{dt}F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{90}$$

Entonces, asumimos que vale la condición de cuasisimetría y expandimos la Ec. (90) hasta orden ϵ,

$$\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + (\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\theta}\dot{\mathbf{q}})\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta\frac{\partial L}{\partial t} + \dot{\theta}L - \dot{F} = 0. \tag{91}$$

Este va a ser después el punto de partida para demostrar lo que pide el problema 12. La Ec. (91) puede ser vista como una ecuación diferencial que deben satisfacer las funciones $\boldsymbol{\eta}$ y θ para que la transformación sea de simetría. No queda otra que saber cómo llegar desde la Ec. (86) hasta la Ec. (91), pero la ventaja es que a partir de ahí el teorema de Noether está a un solo paso.

Si $\mathbf{q}(t)$ es solución de las ecuaciones de E-L, entonces ocurren dos cosas:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \stackrel{*}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right), \qquad \frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{*}{=} -\frac{dh}{dt}. \tag{92}$$

El símbolo $\stackrel{*}{=}$ es para recordarnos que las igualdades valen si $\mathbf{q}$ es solución de las ecuaciones de E-L. Así, bajo estas condiciones, la Ec. (91) puede leerse como

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) + (\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\theta}\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \theta\frac{dh}{dt} + \dot{\theta}L - \dot{F} \stackrel{*}{=} 0. \tag{93}$$

Los términos proporcionales a $\dot{\theta}$ forman la función h, de modo que

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) + \dot{\boldsymbol{\eta}} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \dot{\theta}h - \theta\frac{dh}{dt} - \dot{F} \stackrel{*}{=} 0. \tag{94}$$

Es fácil leer aquí una derivada total respecto del tiempo,

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\eta} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \theta h - F\right) \stackrel{*}{=} 0, \tag{95}$$

o bien,

$$\frac{d}{dt}\left[(\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta L - F\right] \stackrel{*}{=} 0. \tag{96}$$

Por lo tanto, la siguiente función es una constante de movimiento:

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \theta(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \tag{97}$$

O, más brevemente,

$$C = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p} - \theta h - F. \tag{98}$$

3.1. La identidad de Noether

Es interesante notar, y es un buen ejercicio demostrarlo, que la Ec. (91) puede reescribirse como

$$\frac{d}{dt}\left[(\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta L - F\right] = (\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right]. \tag{99}$$

Esta ecuación se conoce como *identidad de Noether* y es equivalente a decir que la transformación es una simetría de la acción o, más propiamente, una cuasisimetría. A diferencia de la Ec. (91), la Ec. (99) muestra inmediatamente que si se satisfacen las ecuaciones de E-L, la transformación tiene asociada una ley de conservación. Además nos dice a qué cosa es igual el primer miembro de la Ec. (96) cuando no estamos sobre una solución de las ecuaciones de E-L.

La identidad de Noether también tiene la ventaja de proporcionar una demostración alternativa del teorema. En efecto, escribiendo $\delta S = S' - S$, resulta

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[L\Big(\mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{q}} + \epsilon(\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{q}}\dot{\theta}), t + \epsilon\theta\Big)(1 + \epsilon\dot{\theta}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right]. \tag{100}$$

Procediendo como antes, se demuestra (este es el ejercicio que queda para ustedes) que la diferencia que figura dentro de la integral es

$$\begin{aligned} L\Big(\mathbf{q} + \epsilon\boldsymbol{\eta}, \dot{\mathbf{q}}&+\epsilon(\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\mathbf{q}}\dot{\theta}), t + \epsilon\theta\Big)(1 + \epsilon\dot{\theta}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ &= \epsilon \left\{ \frac{d}{dt}\left[(\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta L \right] - (\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{101}$$

Entonces,

$$\delta S = \epsilon \left[(\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta L \right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt\ (\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right]. \tag{102}$$

Si se trata de una simetría de la acción en el sentido estricto, $\delta S = 0$. Si además estamos sobre soluciones de las ecuaciones de E-L, será

$$\left[(\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta L \right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} \stackrel{*}{=} 0. \tag{103}$$

Dada la arbitrariedad en la elección de t_1 y de t_2, se concluye que la siguiente cantidad es constante:

$$C = (\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta L = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p} - \theta h. \tag{104}$$

Si en lugar de ser una simetría en el sentido estricto, se trata de una cuasisimetría, la variación de la acción no es cero sino que es igual a un término de borde:

$$\delta S = \epsilon \left[(\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta L \right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} - \epsilon \int_{t_1}^{t_2} dt\ (\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right] = \epsilon F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{105}$$

Sobre soluciones de las ecuaciones de E-L, tendremos

$$\left[(\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta L - F \right]\Bigg|_{t_1}^{t_2} \stackrel{*}{=} 0, \tag{106}$$

entonces es fácil ver que la cantidad conservada es

$$C = (\boldsymbol{\eta} - \theta\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta L - F = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{p} - \theta h - F. \tag{107}$$

4. Problema 12

Una partícula se mueve bajo la acción de un potencial que es homogéneo de grado n en $\mathbf{r}$, es decir, $U(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^n U(\mathbf{r})$, para cualquier $\lambda \geqslant 0$. Se propone una transformación de semejanza, cuya versión infinitesimal es

$$\mathbf{r}' = (1+\epsilon\alpha)\mathbf{r}, \qquad t' = (1+\epsilon\beta)t, \tag{108}$$

donde α y β son constantes y ϵ es el parámetro infinitesimal de la transformación.

a) Encontrar el único valor de n para el cual esta transformación deja invariante la acción.

b) Para ese valor de n, hallar la relación que deben satisfacer α y β.

c) Encontrar la constante de movimiento asociada a esta simetría.

d) Usando la constante de movimiento, dar $r(t)$ y mostrar que no depende de $U(\mathbf{r})$.

e) ¿Cuál es la versión finita de la transformación?

■ Este problema es el único que requiere plantear el teorema de Noether de manera general. Aparece una pregunta nueva: ¿qué condiciones debe tener una transformación para ser una transformación de simetría? A lo que podría agregarse: planteadas estas condiciones, ¿cuáles son todas las transformaciones de simetría posibles?

El lagrangiano es

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}},t) = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}), \tag{109}$$

donde la función $U(\mathbf{r})$ es homogénea de grado n,

$$U(\lambda\mathbf{r}) = \lambda^n U(\mathbf{r}). \tag{110}$$

Se exploran transformaciones de la forma

$$\mathbf{r}' = (1+\epsilon\alpha)\mathbf{r}, \qquad t' = (1+\epsilon\beta)t. \tag{111}$$

Es decir, las funciones $\boldsymbol{\eta}$ y θ son

$$\boldsymbol{\eta} = \alpha\mathbf{r}, \qquad \theta = \beta t. \tag{112}$$

Para que la transformación sea de simetría, debe cumplirse la Ec. (91),

$$\boldsymbol{\eta}\cdot\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + (\dot{\boldsymbol{\eta}} - \dot{\theta}\dot{\mathbf{q}})\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \theta\frac{\partial L}{\partial t} + \dot{\theta}L - \dot{F} = 0. \tag{113}$$

El enunciado pide que la acción sea invariante, de manera que estamos en el caso en el que $F = 0$. Entonces, para este problema, la ecuación anterior se lee como

$$-\alpha\mathbf{r}\cdot\nabla U(\mathbf{r}) + m(\alpha-\beta)\dot{\mathbf{r}}^2 + \beta\left[\tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r})\right] = 0. \tag{114}$$

Usando el teorema de Euler para las funciones homogéneas, $\mathbf{r}\cdot\nabla U = nU$, queda

$$-(\alpha n+\beta)U(\mathbf{r}) + m\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\beta\right)\dot{\mathbf{r}}^2 = 0. \tag{115}$$

El primer miembro es una función de las variables $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$. Para que la ecuación sea cierta, debe anularse cada término, porque dependen de variables distintas. Es decir, debe cumplirse

$$\alpha n + \beta = 0, \qquad \alpha - \tfrac{1}{2}\beta = 0. \tag{116}$$

De aquí resulta

$$n = -2, \qquad \beta = 2\alpha. \tag{117}$$

Era esperable que sólo obtuviéramos una relación entre los valores de α y β, y no un par de constantes determinadas, puesto que siempre podemos redefinir ϵ a menos de una constante multiplicativa.

Resumiendo: el potencial tiene que ser una función homogénea de grado $n = -2$ y, sin pérdida de generalidad, la transformación de simetría es

$$\mathbf{r}' = (1+\epsilon)\mathbf{r}, \qquad t' = (1+2\epsilon)t. \tag{118}$$

Según la conclusión del teorema de Noether, Ec. (97), se conserva la siguiente cantidad:

$$C = \boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{p} - \theta h = m\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} - 2\mathcal{E}t, \tag{119}$$

donde

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) \tag{120}$$

es también una constante de movimiento, debido a que L no depende explícitamente de t.

Un resultado bastante asombroso es que la conservación de C permite obtener la función $r(t)$ independientemente de la forma del potencial. El término $\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ en la Ec. (119) es una derivada total:

$$C = \frac{m}{2}\frac{dr^2}{dt} - 2\mathcal{E}t. \tag{121}$$

Esto permite escribir

$$dr^2 = \frac{2}{m}(C + 2\mathcal{E}t)\,dt. \tag{122}$$

Luego, el radio como función del tiempo está dado por

$$r^2 = r_0^2 + \frac{2}{m}\left[C(t-t_0) + \mathcal{E}(t-t_0)^2\right]. \tag{123}$$

Es muy raro obtener $r(t)$ sin tener que haber pasado por una integral complicada que dependiera del potencial.

Por último, respecto a la versión finita de la transformación, la idea es iterar la transformación infinitesimal:

$$\mathbf{r}^{(N)} = (1+\epsilon)^N \mathbf{r}. \tag{124}$$

Definiendo $\epsilon = s/N$ y tomando el límite $N \to \infty$ con s fijo, resulta

$$\mathbf{r}(s) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{s}{N}\right)^N \mathbf{r} = e^s \mathbf{r}. \tag{125}$$

Del mismo modo, se obtiene

$$t(s) = e^{2s} t. \tag{126}$$

Definiendo $\lambda = e^s$, se ve que la transformación finita es una transformación de semejanza,

$$\mathbf{r}(\lambda) = \lambda \mathbf{r}, \qquad t(\lambda) = \lambda^2 t. \tag{127}$$

5. Problema 13

(Landau & Lifshitz, § 6). Para un sistema con n grados de libertad, la solución de las ecuaciones de movimiento depende de $2n$ constantes. Si el sistema es aislado, sus ecuaciones de movimiento no dependen explícitamente del tiempo. Entonces, una de las $2n$ constantes es una constante aditiva a la variable t. (Convencerse de que esto es cierto). Conocida la solución general, se tienen n pares de ecuaciones de la forma

$$q_i(t) = f_i(c_1, \ldots, c_{2n-1}, t + t_0), \qquad \dot{q}_i(t) = g_i(c_1, \ldots, c_{2n-1}, t + t_0). \tag{128}$$

A partir de estas ecuaciones, se puede eliminar $t + t_0$, y escribir las $2n - 1$ constantes c_i en términos de q_i y $\dot{q}_i$ sin que aparezca el tiempo:

$$c_i = F_i(q_1, \ldots q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n), \qquad i = 1, \ldots, 2n - 1. \tag{129}$$

Esto tiene exactamente la forma de una ley de conservación. En esencia, este método es un algoritmo para encontrar las $2n - 1$ integrales de movimiento de un sistema aislado.

a) Por ejemplo, para una partícula libre en el plano, podemos escribir la solución de las ecuaciones de movimiento como

$$x(t) = x_0 + v_x t \equiv (t + t_0) v_x, \qquad y(t) = y_0 + v_y t \equiv (t + t_0) v_y + \alpha_0. \tag{130}$$

Luego de haber eliminado $t + t_0$, las constantes a eliminar en términos de x, y, $\dot{x}$ e $\dot{y}$ son v_x, v_y y α_0. ¿Cuáles son las leyes de conservación que se deducen de aquí?

b) Aplicar el procedimiento de eliminación a un oscilador armónico, isótropo en dos dimensiones. Tiene que encontrar las mismas constantes de movimiento que se obtienen por simple inspección del lagrangiano.

Nota: resulta convencional llamar integrales de movimiento o integrales primeras a las constantes de movimiento que no dependen explícitamente del tiempo, aunque esta definición no es universal. Un sistema mecánico con n grados de libertad siempre tiene $2n$ constantes de movimiento. Esto es así porque cada trayectoria puede asociarse con los valores de $2n$ constantes, que pueden ser, por ejemplo, los valores de $\mathbf{q}$ y $\dot{\mathbf{q}}$ en un tiempo de referencia t_0 arbitrariamente elegido. Si el sistema es aislado, el argumento de Landau y Lifshitz implica que las $2n$ constantes de movimiento independientes pueden elegirse como $2n-1$ integrales de movimiento más una constante de movimiento que involucra al tiempo linealmente,

$$t_0 = F_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - t. \tag{131}$$

■ La idea de este problema es ir en el otro sentido: en lugar de deducir las soluciones de las ecuaciones de movimiento a partir de las cantidades conservadas, deducir las cantidades conservadas a partir de las soluciones de las ecuaciones de movimiento. Idealmente, esto permitiría encontrar las $2n-1$ integrales de movimiento de un sistema con n grados de libertad. En realidad, el procedimiento muchas veces se ve interrumpido por la multivaluación de las funciones inversas involucradas. Si el procedimiento puede llevarse a cabo, a partir de las integrales de movimiento pueden deducirse las transformaciones de simetría que dan lugar a esas conservaciones.

La cuestión es despejar las constantes de integración en términos de $\mathbf{q}$ y $\dot{\mathbf{q}}$. El primer ejemplo es muy simple. Para una partícula libre que se mueve en el plano, escribimos las soluciones de las ecuaciones de movimiento como

$$x(t) = (t + t_0)v_x, \qquad y(t) = (t + t_0)v_y + \alpha_0. \tag{132}$$

Las cantidades conservadas se construyen a partir de las coordenadas y de sus derivadas, así que calculamos $\dot{x}$ e $\dot{y}$:

$$\dot{x}(t) = v_x, \qquad \dot{y}(t) = v_y. \tag{133}$$

Lo que hemos hecho ha sido escribir las constantes de integración v_x y v_y como funciones de $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$. Uno concluye que tanto $\dot{x}$ como $\dot{y}$ son constantes.

Ya eliminamos v_x y v_y. Eliminando $t + t_0$ en el primer par de ecuaciones, obtenemos

$$xv_y = (y - \alpha_0)v_x. \tag{134}$$

Se trata ahora de despejar α_0. Reagrupando términos y reemplazando v_x y v_y por sus expresiones como funciones de $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$, queda

$$x\dot{y} - y\dot{x} = -\alpha_0 v_x. \tag{135}$$

Esta es la tercera integral de movimiento buscada, que podemos escribir como

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \ell, \tag{136}$$

y que no es otra cosa que el momento angular por unidad de masa.

■ Para aplicar el mismo procedimiento a un oscilador armónico, isótropo, en el plano, empezamos por escribir $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$ en términos de las constantes de integración:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sin(\omega t + \varphi_x), \qquad & \dot{x}(t) &= \omega x_0 \cos(\omega t + \varphi_x), \\ y(t) &= y_0 \sin(\omega t + \varphi_y), \qquad & \dot{y}(t) &= \omega y_0 \cos(\omega t + \varphi_y). \end{aligned} \tag{137}$$

Según la observación de Landau y Lifshitz, siempre debe ser posible, para un sistema aislado, elegir una de las constantes arbitrarias como una constante aditiva a la variable t. Así, definiendo $\omega t_0 = \varphi_x$, resulta

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \sin \omega(t + t_0), \\ y(t) &= y_0 \sin\Big(\omega(t + t_0) + \alpha\Big), \\ \dot{x}(t) &= \omega x_0 \cos \omega(t + t_0), \\ \dot{y}(t) &= \omega y_0 \cos\Big(\omega(t + t_0) + \alpha\Big), \end{aligned} \tag{138}$$

donde $\alpha = \varphi_y - \omega t_0$. Tenemos cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, $t + t_0$, x_0, y_0 y α. Elevando al cuadrado y sumando ecuaciones, podemos despejar fácilmente x_0^2 e y_0^2:

$$\begin{aligned} \omega^2 x_0^2 &= \dot{x}^2 + \omega^2 x^2, \\ \omega^2 y_0^2 &= \dot{y}^2 + \omega^2 y^2. \end{aligned} \tag{139}$$

Con esto tenemos dos integrales de movimiento,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \tfrac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right), \\ \epsilon_y &= \tfrac{1}{2}\left(\dot{y}^2 + \omega^2 y^2\right). \end{aligned} \tag{140}$$

Así definidas, estas constantes son las energías por unidad de masa asociadas a los movimientos en x e y considerados separadamente. Falta encontrar la tercera integral de movimiento. Las dos integrales que tenemos hasta aquí surgieron de despejar x_0 e y_0 en función de $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$. La tercera integral se obtendrá escribiendo α en términos de $\mathbf{r}$ y $\dot{\mathbf{r}}$.

A partir de la ecuación para $y(t)$, desarrollando el seno de la suma, queda

$$y = y_0 \Big[\sin \omega(t + t_0)\ \cos\alpha + \cos\omega(t + t_0)\ \sin\alpha \Big]. \tag{141}$$

Usando las ecuaciones para x y $\dot{x}$ podemos eliminar $\sin\omega(t+t_0)$ y $\cos\omega(t+t_0)$,

$$y = y_0\left(\frac{x}{x_0}\cos\alpha + \frac{\dot{x}}{\omega x_0}\sin\alpha\right). \tag{142}$$

Aunque esta ecuación alcanzaría aparentemente para despejar α, es más cómodo ser algo redundante y evitar usar sustituciones tales como $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, que siempre están definidas a menos de un signo. Además, no es del todo cierto que la ecuación anterior permita despejar α. La función en el miembro de la derecha no es invertible. Para averiguar el valor de un ángulo, no alcanza con conocer su coseno o su seno, o una combinación lineal de ambos, hace falta conocer los dos. Así, si aplicamos a la expresión para $\dot{y}(t)$ los mismos pasos de recién, llegamos a la siguiente ecuación complementaria:

$$\dot{y} = \omega y_0\left(\frac{\dot{x}}{\omega x_0}\cos\alpha - \frac{x}{x_0}\sin\alpha\right). \tag{143}$$

A partir de las ecuaciones anteriores obtenemos $\cos\alpha$ y $\sin\alpha$,

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\omega^2 x_0^2}{\dot{x}^2+\omega^2 x^2}\left(\frac{y}{y_0}\frac{x}{x_0} + \frac{\dot{y}}{\omega y_0}\frac{\dot{x}}{\omega x_0}\right),\\
\sin\alpha &= \frac{\omega^2 x_0^2}{\dot{x}+\omega^2 x^2}\left(\frac{y}{y_0}\frac{\dot{x}}{\omega x_0} - \frac{\dot{y}}{\omega y_0}\frac{x}{x_0}\right).
\end{aligned} \tag{144}$$

Usando las Ecs. (139) y reagrupando un poco, resulta

$$\begin{aligned}
x_0 y_0 \omega^2\cos\alpha &= \dot{x}\dot{y} + \omega^2 xy,\\
-x_0 y_0 \omega\sin\alpha &= x\dot{y} - y\dot{x}.
\end{aligned} \tag{145}$$

Tenemos así dos integrales de movimiento,

$$\begin{aligned}
I &= \tfrac{1}{2}\left(\dot{x}\dot{y} + \omega^2 xy\right),\\
\ell &= x\dot{y} - y\dot{x}.
\end{aligned} \tag{146}$$

El factor $\frac{1}{2}$ en la primera ecuación es convencional. Evidentemente, estas integrales de movimiento no son independientes, debido a que $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$. La segunda integral es el momento angular por unidad de masa, pero probablemente nunca se hayan encontrado con la primera integral. El oscilador isótropo tiene una "constante" de movimiento extra, que en realidad es un tensor, llamado tensor de Fradkin,

$$A_{ij} = \tfrac{1}{2}\left(\dot{x}_i\dot{x}_j + \omega^2 x_i x_j\right). \tag{147}$$

Sus componentes diagonales son las constantes que antes llamamos ϵ_x y ϵ_y. Su traza es la energía total por unidad de masa. La constante I de la Ec. (146) corresponde a la componente del tensor de Fradkin fuera de la diagonal.

Aunque ya vimos que no, podría seguir pareciendo que tenemos un exceso de integrales de movimiento: las tres componentes del tensor simétrico A_{ij} y el momento angular ℓ. Debería haber sólo tres integrales independientes, y, en efecto, sólo hay tres: el determinante del tensor de Fradkin es

$$\begin{aligned} 4|\mathbf{A}| &= (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)(\dot{y}^2 + \omega^2 y^2) - (\dot{x}\dot{y} + \omega^2 xy)^2 \\ &= \omega^2(\dot{x}^2 y^2 + \dot{y}^2 x^2) - 2\omega^2 \dot{x}\dot{y}xy = \omega^2 \ell^2. \end{aligned} \tag{148}$$

Las tres componentes del tensor $\mathbf{A}$ y la constante ℓ no son independientes. En total encontramos sólo tres integrales de movimiento independientes.