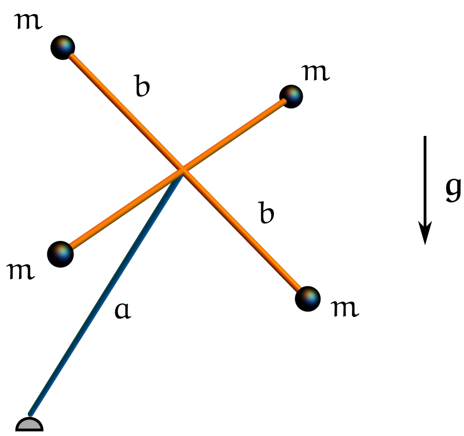
Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Clase práctica del 3 de abril. Guía 1, problema 19.[*]

■ **Problema 19**. Una barra de longitud a tiene un extremo fijo al origen, alrededor del cual puede pivotar sin restricciones. En el otro extremo de la barra se fijan por sus centros un par de barras, perpendiculares entre sí y a la primera barra. Las barras que forman la cruz tienen longitud $2b$. En los extremos de la cruz hay cuatro partículas de masa m. Hay gravedad. Aquí hay una animación.



a) Elegir coordenadas generalizadas y escribir la posición de cada partícula. *Ayuda:* piense en el sistema de versores esféricos asociados al centro de la cruz.

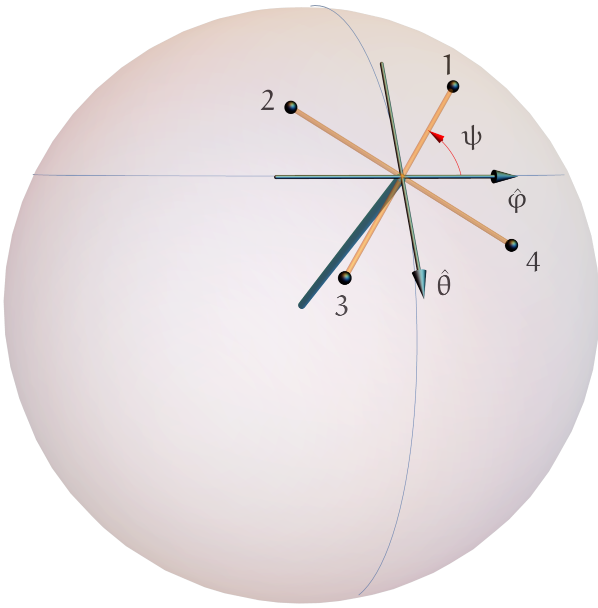
b) Escribir el lagrangiano y encontrar las ecuaciones de E-L.

c) Identificar constantes de movimiento y reducir a un problema unidimensional.

■ a) La resolución de este problema se simplifica mediante el uso sistemático de los versores de las coordenadas esféricas y de sus derivadas. Para definir la configuración del sistema alcanza con dar tres ángulos. Los ángulos θ y φ que definen la orientación de la primera barra y un tercer ángulo que indique la orientación de la cruz. Ese ángulo puede ser el ángulo ψ que forma el brazo de la barra al que pertenece la partícula 1 con la dirección definida por el versor $\hat{\varphi}$, como muestra la figura de la página siguiente. En el plano perpendicular a la primera barra existe una base natural de versores

$$\left\{ \hat{\varphi}(\varphi), \hat{\theta}(\varphi, \theta) \right\}. \tag{1}$$

[*]zanellaj@df.uba.ar



Así, las posiciones de las cuatro partículas son:

$$\mathbf{r}_1(\varphi,\theta,\psi) = a\,\hat{r}(\varphi,\theta) + b\left[\cos\psi\;\hat{\varphi}(\varphi) - \sin\psi\;\hat{\theta}(\varphi,\theta)\right], \tag{2}$$

$$\mathbf{r}_2(\varphi,\theta,\psi) = a\,\hat{r}(\varphi,\theta) - b\left[\sin\psi\;\hat{\varphi}(\varphi) + \cos\psi\;\hat{\theta}(\varphi,\theta)\right], \tag{3}$$

$$\mathbf{r}_3(\varphi,\theta,\psi) = a\,\hat{r}(\varphi,\theta) - b\left[\cos\psi\;\hat{\varphi}(\varphi) - \sin\psi\;\hat{\theta}(\varphi,\theta)\right], \tag{4}$$

$$\mathbf{r}_4(\varphi,\theta,\psi) = a\,\hat{r}(\varphi,\theta) + b\left[\sin\psi\;\hat{\varphi}(\varphi) + \sin\psi\;\hat{\theta}(\varphi,\theta)\right]. \tag{5}$$

■ b) Para expresar la energía cinética del sistema podemos usar la descomposición

$$T = \tfrac{1}{2}MV_{\rm CM}^2 + \sum_{i=1}^{4}\tfrac{1}{2}mv_i'^2, \tag{6}$$

donde $M = 4m$ y donde la velocidad del centro de masa es

$$\mathbf{V}_{\rm CM} = a\,\dot{\hat{r}}. \tag{7}$$

Asimismo, $\mathbf{v}_i'$ es la velocidad de cada partícula respecto del centro de masa. (Obviamente, el centro de masa está en el centro de la cruz). Para escribir esas velocidades conviene introducir los versores

$$\hat{e}_1(\varphi,\theta,\psi) = \cos\psi\;\hat{\varphi}(\varphi) - \sin\psi\;\hat{\theta}(\varphi,\theta), \tag{8}$$

$$\hat{e}_2(\varphi,\theta,\psi) = \sin\psi\;\hat{\varphi}(\varphi) + \cos\psi\;\hat{\theta}(\varphi,\theta), \tag{9}$$

que dan las direcciones de las barras a las que pertenecen las partículas 1 y 3, por un lado, y las partículas 2 y 4, por el otro.

Entonces,

$$\boldsymbol{v}_1' = -\boldsymbol{v}_3' = b\,\dot{\hat{e}}_1, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{v}_2' = -\boldsymbol{v}_4' = -b\,\dot{\hat{e}}_2, \tag{11}$$

y

$$\sum_{i=1}^{4} \tfrac{1}{2} m v_i'^2 = m b^2 \left(|\dot{\hat{e}}_1|^2 + |\dot{\hat{e}}_2|^2 \right). \tag{12}$$

Calcular la velocidad del centro de masa es sencillo:

$$\mathbf{V}_{\mathrm{CM}} = a\,\dot{\hat{r}}(\varphi,\theta) = a(\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\;\hat{\varphi}). \tag{13}$$

Luego, como era esperable,

$$V_{\mathrm{CM}}^2 = a^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta). \tag{14}$$

El trabajo pesado está en calcular las derivadas temporales de los versores $\hat{e}_i$. En primer lugar, las derivadas temporales de los versores de la base de esféricas son

$$\dot{\hat{\varphi}} = -\dot{\varphi}\;\hat{\rho} = -\dot{\varphi}(\sin\theta\;\hat{r} + \cos\theta\;\hat{\theta}), \tag{15}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \dot{\varphi}\cos\theta\;\hat{\varphi} - \dot{\theta}\;\hat{r}. \tag{16}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_1 &= -\dot{\psi}(\sin\psi\;\hat{\varphi} + \cos\psi\;\hat{\theta}) - \dot{\varphi}\cos\psi(\sin\theta\;\hat{r} + \cos\theta\;\hat{\theta}) - \sin\psi(\dot{\varphi}\cos\theta\;\hat{\varphi} - \dot{\theta}\;\hat{r}) \\ &= (\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta)\hat{r} - (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)(\cos\psi\;\hat{\theta} + \sin\psi\;\hat{\varphi}). \end{aligned} \tag{17}$$

Más aún,

$$|\dot{\hat{e}}_1|^2 = (\dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta)^2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2. \tag{18}$$

Notar la precaución que tomamos en no expandir estas expresiones más allá de aquí. Esto tiene carácter retrospectivo. De la misma forma se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_2 &= \dot{\psi}(\cos\psi\;\hat{\varphi} - \sin\psi\;\hat{\theta}) - \dot{\varphi}\sin\psi(\sin\theta\;\hat{r} + \cos\theta\;\hat{\theta}) + \cos\psi(\dot{\varphi}\cos\theta\;\hat{\varphi} - \dot{\theta}\;\hat{r}) \\ &= -(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta)\hat{r} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)(-\sin\psi\;\hat{\theta} + \cos\psi\;\hat{\varphi}) \end{aligned} \tag{19}$$

y

$$|\dot{\hat{e}}_2|^2 = (\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta)^2 + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2. \tag{20}$$

Para evaluar la expresión (12) tenemos que calcular

$$|\dot{\hat{e}}_1|^2 + |\dot{\hat{e}}_2|^2 = 2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta). \tag{21}$$

Finalmente, reuniendo todos los resultados, la energía cinética es

$$T = \tfrac{1}{2}\,4mb^2(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + \tfrac{1}{2}\,m(4a^2 + 2b^2)(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta). \tag{22}$$

Lo escribimos así porque cuando lleguemos a la guía de cuerpo rígido este resultado será más fácil de interpretar. Podemos ir un poco más lejos y definir

$$I = m(4a^2 + 2b^2) \tag{23}$$

y

$$I_3 = 4mb^2, \tag{24}$$

con lo que resulta

$$T = \tfrac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + \tfrac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta). \tag{25}$$

Para terminar de escribir el lagrangiano, observemos que la energía potencial es la de una partícula de masa $M = 4m$ en la posición del centro de masa,

$$V(\theta) = Mga\cos\theta. \tag{26}$$

En definitiva, el lagrangiano es

$$\mathcal{L}(\varphi,\theta,\psi,\dot{\varphi},\dot{\theta},\dot{\psi},t) = \tfrac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + \tfrac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - Mga\cos\theta. \tag{27}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = 0 \quad\Rightarrow\quad I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta + I\dot{\varphi}\sin^2\theta = p_\varphi, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = 0 \quad\Rightarrow I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = p_\psi \equiv I_3\omega_3, \tag{29}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \quad\Rightarrow\quad I\ddot{\theta} + I_3\omega_3\dot{\varphi}\sin\theta - I\dot{\varphi}^2\sin\theta\,\cos\theta - Mga\sin\theta = 0. \tag{30}$$

Aquí p_φ, p_ψ y ω_3 son constantes. En el caso de φ y ψ no fue necesario calcular la derivada total respecto del tiempo para escribir la ecuación de movimiento asociada, pues esa derivada está igualada a cero.

■ c) En el argumento de $\mathcal{L}$ en la ec. (27) escribimos todas las variables posibles, pero en realidad $\mathcal{L}$ es independiente de φ, ψ y t. Tendremos entonces dos momentos conservados, a los que debemos agregar la conservación de la función h, que en este caso coincide con la energía (T es cuadrática en las velocidades y V no depende de ellas).

Como ha quedado escrito antes, la conservación del momento asociado a ψ implica

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = p_\psi. \tag{31}$$

En tanto que la conservación del momento asociado a φ se lee como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)\cos\theta + I\dot{\varphi}\sin^2\theta = p_\psi\cos\theta + I\dot{\varphi}\sin^2\theta = p_\varphi, \tag{32}$$

y la conservación de la energía mecánica, como

$$\tfrac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2 + \tfrac{1}{2}I(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + Mga\cos\theta = E. \tag{33}$$

■ d) Nuestro objetivo es usar las primeras dos ecuaciones para eliminar $\dot{\psi}$ y $\dot{\varphi}$ en términos de θ y de $\dot{\theta}$, de modo que, al reemplazar en la ecuación de conservación de la energía, obtengamos una ecuación de conservación para un problema unidimensional en la variable θ. Notar que en la expresión para la energía, $\dot{\psi}$ aparece en la combinación $\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta$, de manera que no es realmente necesario despejar $\dot{\psi}$, sino únicamente esa combinación,

$$\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta = \frac{p_\psi}{I_3}. \tag{34}$$

Del mismo modo despejamos

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\theta - p_\psi\cos\theta}{I\sin^2\theta}. \tag{35}$$

Reemplazando en la ecuación de conservación de la energía obtenemos

$$\frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\theta - p_\psi\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + Mga\cos\theta = E. \tag{36}$$

El primer término es constante, de forma que podemos escribir, más simplemente,

$$\frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\theta - p_\psi\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + Mga\cos\theta = E'. \tag{37}$$

El potencial efectivo para el problema unidimensional equivalente es

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(p_\theta - p_\psi\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + Mga\cos\theta. \tag{38}$$

Veremos luego que este problema es el de una peonza simétrica pesada con un punto fijo.

Ustedes pueden verificar que las cantidades que hemos definido antes, I_3 e I, son los momentos de inercia principales del sistema respecto al origen. Lo que hemos obtenido no es otra cosa que el lagrangiano de una peonza simétrica pesada con un punto fijo. Esto muestra una manera de resolver problemas de cuerpo rígido sin saber nada acerca de velocidades angulares o tensores de inercia. Con un número relativamente pequeño de partículas podemos simular cualquier problema de cuerpo rígido que no involucre la forma precisa del cuerpo.