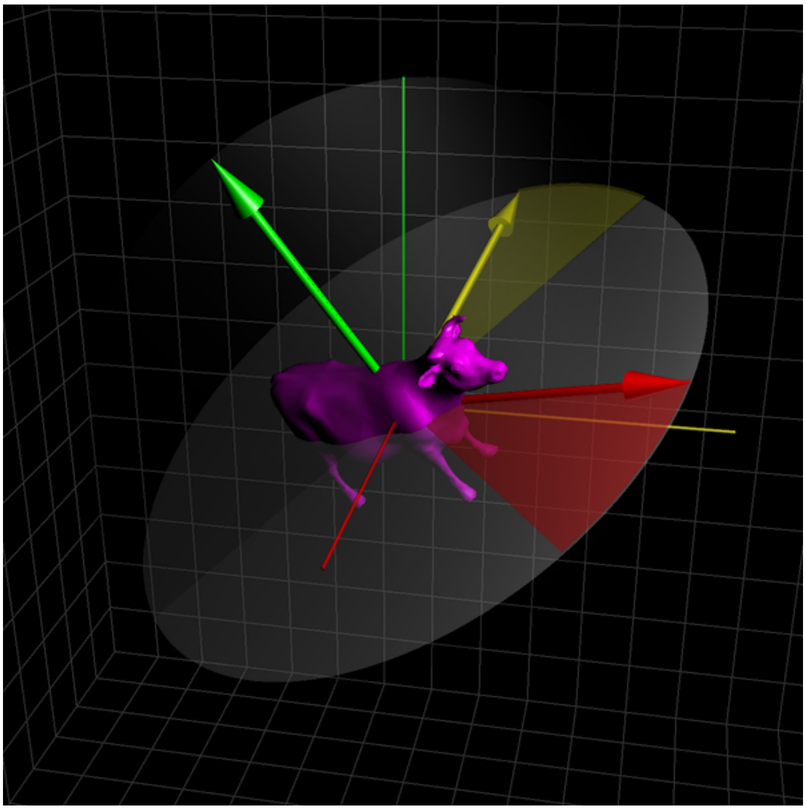
Mecánica Clásica A – 1er. cuatrimestre de 2021

Cuerpo rígido sin matrices.[*]



Conocimientos benévolos

Hay cuatro cosas que uno debería ser capaz de escribir con un mínimo de esfuerzo sin tener que consultar ningún apunte:

- La expresión de la velocidad angular:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{\rho}(\varphi) + \dot{\psi}\,\hat{e}_3(\theta,\varphi). \tag{1}$$

- Los versores fijos al cuerpo en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} \hat{e}_1(\theta,\varphi,\psi) &= \sin\psi \left[\cos\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta\,\hat{z}\right] + \cos\psi\,\hat{\rho}(\varphi), \\ \hat{e}_2(\theta,\varphi,\psi) &= \cos\psi \left[\cos\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \sin\theta\,\hat{z}\right] - \sin\psi\,\hat{\rho}(\varphi), \\ \hat{e}_3(\theta,\varphi) &= -\sin\theta\,\hat{\varphi}(\varphi) + \cos\theta\,\hat{z}. \end{cases} \tag{2}$$

[*]zanellaj@df.uba.ar

- Las componentes de la velocidad angular en la base de versores fijos al cuerpo:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\varphi} \sin\theta \sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi, \\ \omega_2 = \dot{\varphi} \sin\theta \cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ \omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{cases} \tag{3}$$

- La energía de rotación para una peonza simétrica en términos de los ángulos de Euler cuando los versores fijos al cuerpo coinciden con una terna de ejes principales (el versor $\hat{e}_3$ está en la dirección del eje de simetría):

$$\mathcal{E}_{\text{Rot}} = \tfrac{1}{2} I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 + \tfrac{1}{2} I \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right). \tag{4}$$

La expresión (1) es fácil de *deducir*. Resalto la palabra *deducir* porque en verdad no puede hablarse de una deducción. Los pasos no son estrictamente lógicos. Debe tomarse como una regla intuitiva que funciona para la convención particular de ángulos de Euler que estamos usando, en donde importan tanto los ángulos como el orden de las rotaciones. Es una regla que vale por accidente. La regla mnemotécnica es así: una variación en φ induce una rotación según $\hat{z}$. Una variación en θ induce una rotación según $\hat{\rho}(\varphi)$. Por último, una variación en ψ induce una rotación según la dirección del versor $\hat{e}_3$. Luego, intuitivamente debería ser

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\hat{z} + \dot{\theta}\,\hat{\rho}(\varphi) + \dot{\psi}\,\hat{e}_3(\theta,\varphi). \tag{5}$$

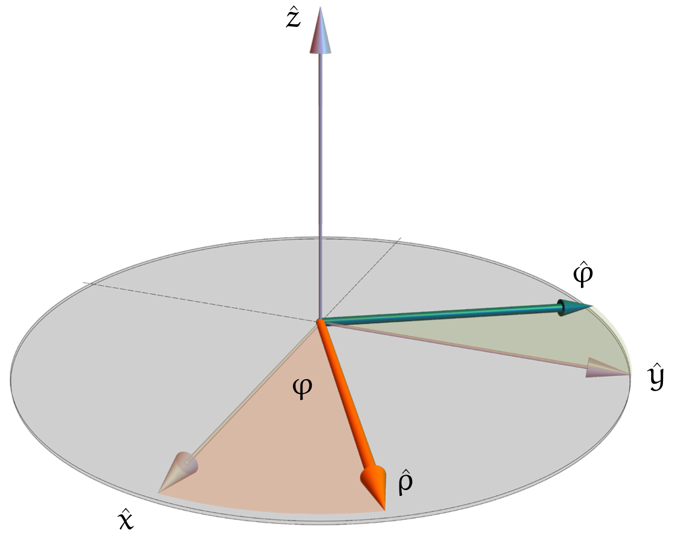
El resultado es correcto. El razonamiento, no (https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.12522).

Las expresiones (2) se pueden ir construyendo mentalmente. Casi que alcanza con recordar una sola cosa: que la línea de nodos es el versor $\hat{\rho}(\varphi)$. La línea de nodos es la dirección del versor $\hat{e}_1$ cuando sólo se ha hecho la primera rotación. Esa rotación transforma el versor $\hat{x}$ en el versor $\hat{\rho}(\varphi)$ y el versor $\hat{y}$ en el versor $\hat{\varphi}(\varphi)$. Notar que $\hat{\rho}$ y $\hat{\varphi}$ son combinaciones lineales de $\hat{x}$ y $\hat{y}$,

$$\hat{\rho} = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}, \tag{6}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}. \tag{7}$$

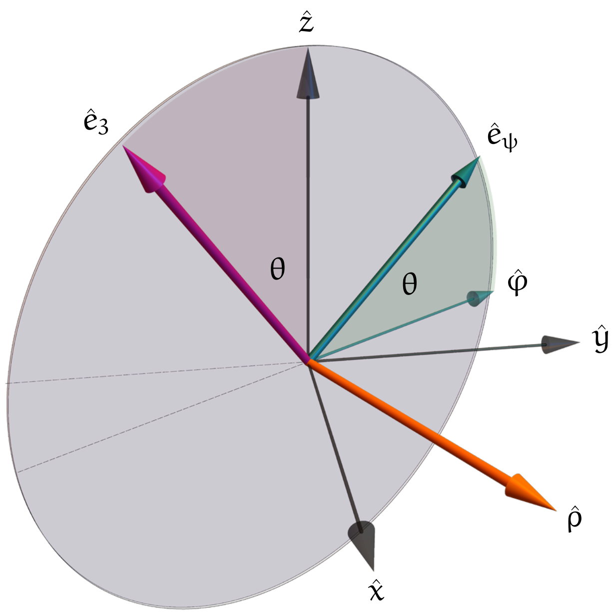
El caso $\varphi = 0$ nos indica el lugar de los cosenos en estas expresiones. En tal situación, $\hat{\rho}$ tiene que ser igual a $\hat{x}$ y $\hat{\varphi}$ tiene que ser igual a $\hat{y}$. El seno aparece con signo positivo en una de las expresiones y con signo negativo en la otra. Eso se lee fácilmente en la figura.



La segunda rotación transforma a los versores $\hat{\varphi}$ y $\hat{z}$ en dos combinaciones lineales de ellos mismos. Esas combinaciones lineales copian la misma forma que las expresiones (6) y (7). El versor $\hat{z}$ es transformado en $\hat{e}_3$ y el versor $\hat{\varphi}$ en $\hat{e}_\psi$, donde

$$\hat{e}_\psi = \cos\theta\,\hat{\varphi} + \sin\theta\,\hat{z}, \tag{8}$$

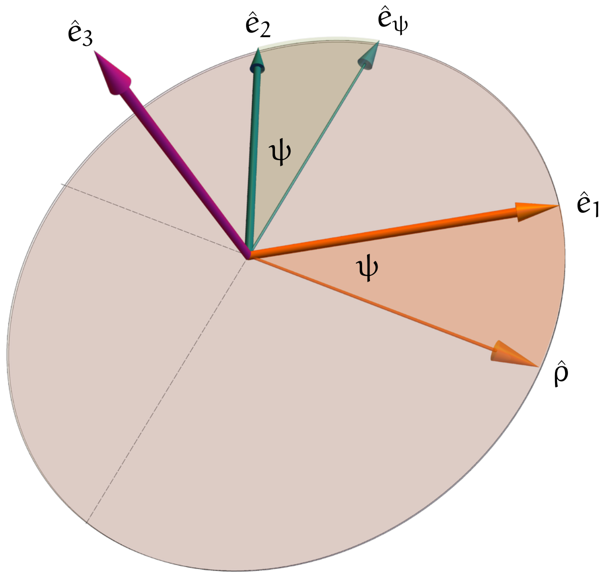
$$\hat{e}_3 = -\sin\theta\,\hat{\varphi} + \cos\theta\,\hat{z}. \tag{9}$$



Finalmente, la rotación alrededor de $\hat{e}_3$ transforma a los versores $\hat{\rho}$ y $\hat{e}_\psi$ en combinaciones lineales de ellos mismos, siempre copiando el mismo modelo:

$$\hat{e}_1 = \cos\psi\,\hat{\rho} + \sin\psi\,\hat{e}_\psi, \tag{10}$$

$$\hat{e}_2 = -\sin\psi\,\hat{\rho} + \cos\psi\,\hat{e}_\psi. \tag{11}$$



Esto completa la deducción de las expresiones (2).

Para deducir las componentes de las velocidad angular en la base de versores fijos al cuerpo, basta hacer el producto escalar de la expresión (1) con cada una de las expresiones (2).

Combinando todo lo dicho anteriormente, escribimos la energía cinética de rotación en términos de los ángulos de Euler cuando se usa la representación de versores fijos al cuerpo y cuando esos versores están sobre las direcciones de ejes principales:

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{Rot}} &= \frac{I_1}{2}\omega_1^2 + \frac{I_2}{2}\omega_2^2 + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 \\ &= \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi\right)^2 + \frac{I_2}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi\right)^2 + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Un caso de especial importancia es el de los cuerpos simétricos, en donde dos de los momentos de inercia principales son iguales. Lo usual es elegir los ejes fijos al cuerpo de modo que sea $I_1 = I_2 = I$. Pero independientemente de esto, una propiedad que resulta útil es que la elección de los ejes principales cuyos momentos son iguales es arbitraria. Lo único que está definido es el plano en el que deben estar esos ejes. Eso quiere decir que se puede tomar cualquier par de versores $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ en ese plano sin alterar la forma de la matriz I_{ij}. Siempre será $I_1 = I_2 = I$. Como deberían comprobar, resultará entonces

$$T_{\mathrm{Rot}} = \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 + \frac{I}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right). \tag{13}$$

Es lógico que en esta expresión ψ sea una variable cíclica, porque en cualquier instante podemos definir las direcciones principales con $\hat{e}_1$ en la línea de nodos, lo que es equivalente a tomar $\psi = 0$. De hecho, esa es la forma más rápida de deducir la expresión anterior a partir de la ec. (12).