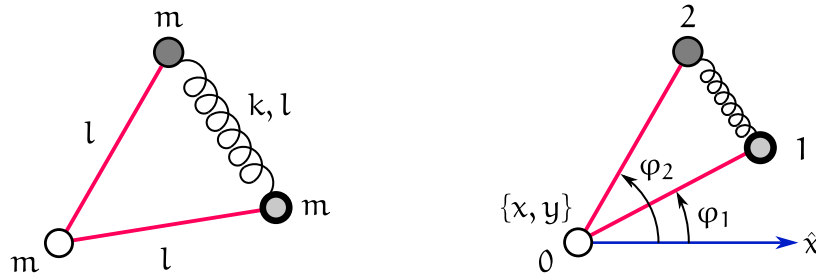


**Mecánica Clásica – primer cuatrimestre de 2023**  
**Primer parcial con las soluciones\***

■ **Problema 1.** Un sistema está formado por tres partículas de masa  $m$ , como muestra la figura. Las partículas se mueven en un plano. Las barras pueden girar de manera independiente. Elija coordenadas generalizadas, escriba el lagrangiano y las ecuaciones de Euler-Lagrange.



■ **Solución.** Supongamos que las partículas se mueven en el plano  $xy$ . Un conjunto posible de coordenadas generalizadas está compuesto por las coordenadas  $x$  e  $y$  de la partícula 0 y los ángulos polares  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de los vectores  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$  y  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0$ . La prueba es que con estas coordenadas podemos escribir las posiciones de las tres partículas:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= x\hat{x} + y\hat{y}, \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_0 + l\hat{\rho}(\varphi_1), \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_0 + l\hat{\rho}(\varphi_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Por otro lado, sus velocidades son

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}, \\ \dot{\mathbf{r}}_1 &= \dot{\mathbf{r}}_0 + l\dot{\varphi}_1\hat{\phi}(\varphi_1), \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= \dot{\mathbf{r}}_0 + l\dot{\varphi}_2\hat{\phi}(\varphi_2). \end{aligned} \tag{2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}_0|^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \\ |\dot{\mathbf{r}}_1|^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l^2\dot{\varphi}_1^2 + 2l\dot{\varphi}_1(-\dot{x}\sin\varphi_1 + \dot{y}\cos\varphi_1), \\ |\dot{\mathbf{r}}_2|^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + l^2\dot{\varphi}_2^2 + 2l\dot{\varphi}_2(-\dot{x}\sin\varphi_2 + \dot{y}\cos\varphi_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Estas expresiones están calculadas usando que

$$|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots|^2 = |\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + \dots + 2\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 + \dots \tag{4}$$

---

\*zanellaj@df.uba.ar

y que  $\hat{\varphi}(\varphi) = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$ . La energía potencial es

$$V = \frac{1}{2}k(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| - l)^2, \quad (5)$$

donde la distancia entre las partículas 1 y 2 está dada por

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = l|\hat{\rho}(\varphi_2) - \hat{\rho}(\varphi_1)| = l\sqrt{2 - 2\hat{\rho}(\varphi_2) \cdot \hat{\rho}(\varphi_1)} = \sqrt{2} l\sqrt{1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (6)$$

Finalmente, el lagrangiano es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, y, \varphi_1, \varphi_2, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) &= \frac{3}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ &+ \frac{1}{2}ml \left[ l(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + 2\dot{\varphi}_1(-\dot{x} \sin \varphi_1 + \dot{y} \cos \varphi_1) + 2\dot{\varphi}_2(-\dot{x} \sin \varphi_2 + \dot{y} \cos \varphi_2) \right] \\ &- \frac{1}{2}kl^2 \left[ \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} - 1 \right]^2. \end{aligned} \quad (7)$$

A menos de constantes multiplicativas, las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [3\dot{x} - l(\dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2)] &= 0, \\ \frac{d}{dt} [3\dot{y} + l(\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2)] &= 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{l}(-\ddot{x} \sin \varphi_1 + \ddot{y} \cos \varphi_1) &= \frac{k}{m} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} \right] \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{l}(-\ddot{x} \sin \varphi_2 + \ddot{y} \cos \varphi_2) &= -\frac{k}{m} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} \right] \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (8)$$

■ En lugar de  $x$  e  $y$ , muchos eligieron las coordenadas polares  $\rho$  y  $\varphi$  para describir la posición de la partícula 0. Con esa elección resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \rho \hat{\rho}(\varphi), \\ \dot{\mathbf{r}}_0 &= \dot{\rho} \hat{\rho}(\varphi) + \rho \dot{\varphi} \hat{\varphi}(\varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Luego, los módulos al cuadrado de las velocidades son

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}_0|^2 &= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2, \\ |\dot{\mathbf{r}}_1|^2 &= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2l\dot{\varphi}_1 [\dot{\rho} \sin(\varphi - \varphi_1) + \rho \dot{\varphi} \cos(\varphi - \varphi_1)], \\ |\dot{\mathbf{r}}_2|^2 &= \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + l^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2l\dot{\varphi}_2 [\dot{\rho} \sin(\varphi - \varphi_2) + \rho \dot{\varphi} \cos(\varphi - \varphi_2)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Para escribir estas expresiones hemos usado que

$$\hat{\varphi}(\alpha) \cdot \hat{\rho}(\beta) = \hat{\rho}\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha\right) \cdot \hat{\rho}(\beta) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi + \alpha - \beta\right) = \sin(\beta - \alpha). \quad (11)$$

El lagrangiano en estas coordenadas es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{3}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}ml\left\{l(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + 2\dot{\varphi}_1[\dot{\rho}\sin(\varphi - \varphi_1) + \rho\dot{\varphi}\cos(\varphi - \varphi_1)] \right. \\ & \left. + 2\dot{\varphi}_2[\dot{\rho}\sin(\varphi - \varphi_2) + \rho\dot{\varphi}\cos(\varphi - \varphi_2)]\right\} - \frac{1}{2}kl^2\left[\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} - 1\right]^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Con esta elección de las coordenadas generalizadas, obtener las ecuaciones de E-L es un poco más laborioso porque no hay coordenadas cíclicas. Sin embargo, la simetría entre las coordenadas  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  reduce las cuentas a la mitad:

$$\begin{aligned} 3\ddot{\rho} + l\left[\ddot{\varphi}_1\sin(\varphi - \varphi_1) - \dot{\varphi}_1^2\cos(\varphi - \varphi_1) + (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)\right] - 3\rho\dot{\varphi}^2 &= 0, \\ 3(\rho^2\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}) + l\rho\left\{\ddot{\varphi}_1\cos(\varphi - \varphi_1) + \dot{\varphi}_1^2\sin(\varphi - \varphi_1) + (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)\right\} &= 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{l}\left[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\sin(\varphi - \varphi_1) + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\cos(\varphi - \varphi_1)\right] \\ &= \frac{k}{m}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}\right]\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \ddot{\varphi}_2 + \frac{1}{l}\left[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\sin(\varphi - \varphi_2) + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\cos(\varphi - \varphi_2)\right] \\ &= -\frac{k}{m}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}\right]\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned} \quad (13)$$

Un detalle práctico, que uno aprende a fuerza de calcular ecuaciones de E-L, es que cuando en el lagrangiano se tiene un término de la forma

$$g = \dot{q}_1 f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_2, \dots), \quad (14)$$

donde  $f$  puede depender de todas las coordenadas y de todas las velocidades salvo  $\dot{q}_1$ , va a existir la siguiente cancelación:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial g}{\partial q_1} = \dot{q}_1 \frac{\partial f}{\partial q_1} + \dots - \dot{q}_1 \frac{\partial f}{\partial q_1}. \quad (15)$$

Esto ocurre, por ejemplo, con el término

$$\dot{\varphi}_1 \dot{\rho} \sin(\varphi - \varphi_1) \quad (16)$$

en el lagrangiano (12). En lo que respecta a  $\varphi_1$ , tiene la misma propiedad que una derivada

total: no genera términos proporcionales a  $\dot{\varphi}_1$  en las ecuaciones de E-L. En efecto, este término llegará a las ecuaciones de E-L como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \dot{\rho} \sin(\varphi - \varphi_1) \right] - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left[ \dot{\varphi}_1 \dot{\rho} \sin(\varphi - \varphi_1) \right] \\ = \dot{\rho}(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_1) \cos(\varphi - \varphi_1) + \ddot{\rho} \sin(\varphi - \varphi_1) + \dot{\varphi}_1 \dot{\rho} \cos(\varphi - \varphi_1). \end{aligned} \quad (17)$$

Los términos proporcionales a  $\dot{\varphi}_1$  se cancelan y la expresión anterior se reduce a

$$\dot{\rho} \dot{\varphi} \cos(\varphi - \varphi_1) + \ddot{\rho} \sin(\varphi - \varphi_1). \quad (18)$$

Esta propiedad, repetida una o dos veces en cada ecuación de E-L, aligera muchísimo las cuentas.

■ **Problema 2.** Una partícula de masa  $m$  se mueve bajo la acción del potencial gravitatorio  $U$  generado por una distribución rígida de masa que se traslada con velocidad  $\mathbf{V} = V\hat{z}$  y que rota con velocidad angular  $\omega$  alrededor del eje  $z$ .

- ¿Cuál es, en coordenadas cilíndricas, la forma funcional más general que puede tener  $U$ ?
- Usando coordenadas cilíndricas, encontrar una familia no trivial de transformaciones de las coordenadas y el tiempo que dejen invariante el lagrangiano.
- Encontrar la constante de movimiento asociada a esta familia de transformaciones.

■ **Solución.** Una distribución de masa que rota y se traslada genera un potencial gravitatorio que rota y se traslada con la misma velocidad angular y la misma velocidad lineal que la distribución de masa. El potencial  $U$  tendrá la siguiente propiedad:

$$U(\rho, \varphi, z, t) = U(\rho, \varphi + \epsilon\omega, z + \epsilon V, t + \epsilon). \quad (19)$$

Aquí  $\epsilon$  no es necesariamente infinitesimal. La propiedad anterior es análoga a la de un potencial, función de las coordenadas cartesianas, que se propaga con velocidad constante

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r} + \epsilon\mathbf{V}, t + \epsilon), \quad (20)$$

con la diferencia de que la transformación está aplicada a un conjunto distinto de coordenadas. Pero así como en el caso del potencial que se traslada podemos decir que

$$U(\mathbf{r}, t) = U(x - V_x t, y - V_y t, z - V_z t) \quad (21)$$

podremos concluir igualmente que la forma funcional más general de  $U$  será

$$U(\rho, \varphi, z, t) = U(\rho, \varphi - \omega t, z - Vt). \quad (22)$$

La Ec. (19) expresa la invariancia del potencial frente a la transformación

$$\rho' = \rho, \quad \varphi' = \varphi + \epsilon\omega, \quad z' = z + \epsilon V, \quad t' = t + \epsilon. \quad (23)$$

Es fácil ver que las velocidades generalizadas no cambian,

$$\frac{d\rho'}{dt'} = \dot{\rho}, \quad \frac{d\varphi'}{dt'} = \dot{\varphi}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \dot{z}, \quad (24)$$

de modo que la transformación es también una simetría de la energía cinética y, por lo tanto, del lagrangiano. El lagrangiano del problema pertenece a la familia de lagrangianos para los cuales

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi + \epsilon\omega, z + \epsilon V, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t + \epsilon) = \mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t). \quad (25)$$

Expandiendo hasta orden  $\epsilon$ , resulta

$$\omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + V \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0. \quad (26)$$

Sobre soluciones de las ecuaciones de E-L valdrá lo siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left( \omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + V \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - h \right) \stackrel{*}{=} 0. \quad (27)$$

La cantidad entre paréntesis será una constante de movimiento,

$$C = \omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + V \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - h = \omega L_z + V p_z - h. \quad (28)$$

Para escribir la constante de movimiento explícitamente, hay que tener en cuenta que el lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mU(\rho, \varphi - \omega t, z - Vt). \quad (29)$$

La función  $h$  es la energía. Por otro lado,  $L_z = m\rho^2\dot{\varphi}$  y  $p_z = m\dot{z}$ . Luego,

$$C(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) = \omega m\rho^2\dot{\varphi} + Vm\dot{z} - \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mU(\rho, \varphi - \omega t, z - Vt). \quad (30)$$

De manera más compacta, a menos de un signo y de términos constantes, la constante de movimiento es

$$\tilde{C} = \frac{1}{2}m[\dot{\rho}^2 + \rho^2(\dot{\varphi} - \omega)^2 + (\dot{z} - V)^2] + mU(\rho, \varphi - \omega t, z - Vt) - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2. \quad (31)$$

Es fácil interpretar este resultado: a menos de términos constantes, la constante  $\tilde{C}$  es la función  $\tilde{h}$  cuando el lagrangiano se escribe en las coordenadas del sistema de referencia que se traslada y rota con el potencial. La demostración queda como ejercicio. La conservación de  $\tilde{h}$  se debe a que en esas coordenadas el potencial es estático y el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo.

■ **Problema 3.** Una partícula de masa  $m$  se mueve en el potencial central

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{ka}{2r^2} \quad (k > 0).$$

- ¿Para qué valores de  $r$  son posibles las órbitas circulares?
- Dada una órbita circular de radio  $r$ , ¿bajo qué condiciones la órbita es estable?
- Asuma que  $a < 0$  y considere las órbitas que provienen de perturbar una órbita circular de radio  $r$ . Dé un valor de  $r$  tal que, en la aproximación lineal, las órbitas perturbadas sean cerradas. Grafique una de estas órbitas.

■ **Solución.** Para que existan órbitas circulares de radio  $r$ , debe ser  $V'(r) > 0$ . En este caso,

$$V'(r) = \frac{k}{r^2} - \frac{ka}{r^3} = \frac{k}{r^3}(r - a). \quad (32)$$

Luego, para que  $V'(r)$  sea mayor que cero debe ocurrir que

$$r > a. \quad (33)$$

Si  $a$  es negativo, podrá haber órbitas circulares para cualquier valor de  $r > 0$ .

La estabilidad de las órbitas circulares está determinada por el signo de  $\kappa^2(r)$ , donde

$$\kappa^2(r) = 3 + \frac{rV''(r)}{V'(r)} \quad (34)$$

es la constante que aparece cuando uno linealiza el problema de las perturbaciones alrededor de una órbita circular de radio  $r$ :

$$\frac{1}{2}\delta\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\kappa^2(r)\delta r^2 = \mathcal{E}. \quad (35)$$

En este caso es

$$\kappa^2(r) = \frac{r}{r - a}. \quad (36)$$

El criterio de estabilidad basado en el signo de  $\kappa^2$  es equivalente al basado en el signo de  $V''_{\text{ef}}(r)$ , que surge del problema de la evolución temporal de la perturbación:

$$\frac{1}{2}m\dot{\delta r}^2 + \frac{1}{2}V''_{\text{ef}}(r)\delta r^2 = \mathcal{E}, \quad (37)$$

con la condición adicional

$$\frac{l^2}{mr^3} = V'(r). \quad (38)$$

Volviendo a la Ec. (36), por hipótesis, la órbita circular de radio  $r$  es una órbita admisible, de manera que  $r > a$ . Entonces  $\kappa^2$  es siempre mayor que cero y las órbitas circulares son estables.

Supongamos que sea  $a = -\alpha$ , con  $\alpha > 0$ . Tendremos

$$\kappa^2(r) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{r}}. \quad (39)$$

Vemos que  $\kappa^2$  es menor que uno. Al margen de eso, para que las órbitas perturbadas sean cerradas,  $\kappa$  tiene que ser igual a un número racional, digamos  $\rho$ ,

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{r}} = \rho^2. \quad (40)$$

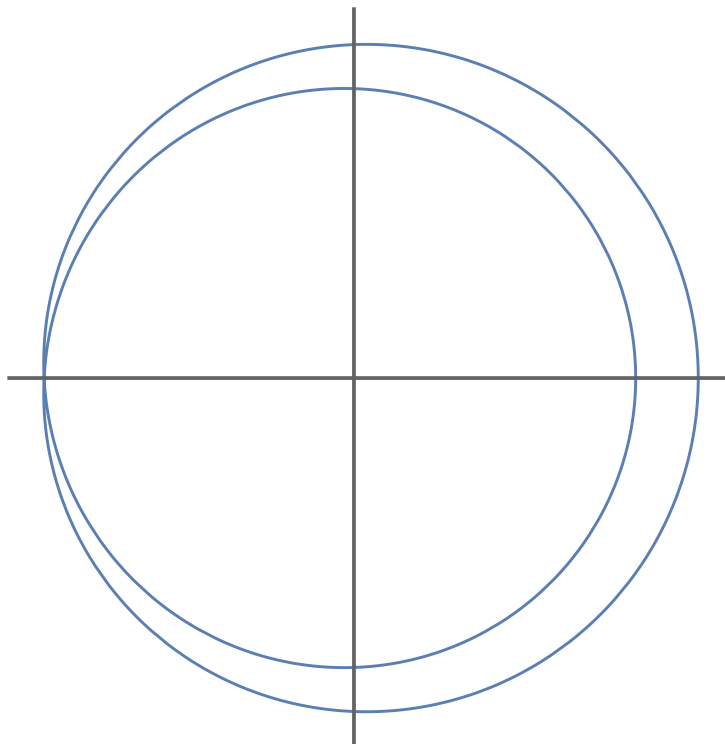
Despejando  $r$ , obtenemos

$$r = \frac{\alpha}{\frac{1}{\rho^2} - 1}. \quad (41)$$

El problema pide *algún* valor de  $r$ , de modo que lo que resta es elegir algún valor de  $\rho$  que sea menor que uno. Conviene elegir un número racional  $p/q$  con valores pequeños de  $p$  y  $q$ , para que sea más fácil graficar la órbita. Por ejemplo,  $\rho = \frac{1}{2}$  implica

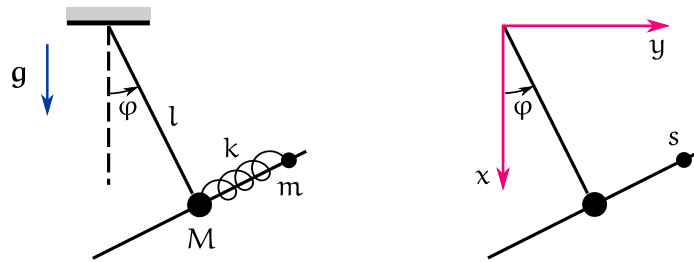
$$r = \frac{\alpha}{3}. \quad (42)$$

Un valor de  $\kappa$  igual a  $\frac{1}{2}$  significa que una oscilación radial se produce luego de dos revoluciones. Exagerando un poco la perturbación, la órbita tiene la apariencia que muestra la figura.



■ **Problema 4.** Considere el sistema de la figura. Las dos barras forman una T rígida que puede rotar como un péndulo en el plano de la figura. La partícula de masa  $m$  se mueve sobre la barra transversal y puede pasar a través de la partícula de masa  $M$ , que está fija en la intersección de las dos barras. La longitud natural del resorte es cero.

- Elija coordenadas generalizadas y escriba el lagrangiano.
- Considere la configuración de equilibrio en la que  $\varphi = 0$  y la partícula de masa  $m$  está en la intersección de las dos barras. Escriba el lagrangiano de pequeñas oscilaciones correspondiente a esa configuración.
- Encuentre las frecuencias, modos y coordenadas normales.



■ **Solución.** Eligiendo las coordenadas generalizadas  $\varphi$  y  $s$  que muestra la figura de la derecha, donde  $s$  está medida a partir del punto de intersección de las dos barras, la posición, velocidad y energía cinética de la partícula de masa  $m$  son

$$\mathbf{r} = l\hat{\rho}(\varphi) + s\hat{\phi}(\varphi), \quad (43)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = (l\dot{\varphi} + \dot{s})\hat{\rho}(\varphi) - s\dot{\varphi}\hat{\phi}(\varphi), \quad (44)$$

$$T = \frac{1}{2}m [(l^2 + s^2)\dot{\varphi}^2 + \dot{s}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{s}]. \quad (45)$$

El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [l^2M + (l^2 + s^2)m] \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m (\dot{s}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{s}) + (M+m)gl \cos \varphi - mgs \sin \varphi - \frac{1}{2}ks^2. \quad (46)$$

Conviene adimensionalizar el lagrangiano:

$$\frac{l}{g} \frac{\mathcal{L}}{l^2M} = \frac{1}{2} [1 + (1 + s^2)\mu] \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\mu (\dot{s}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{s}) + (1 + \mu) \cos \varphi - \mu s \sin \varphi - \frac{1}{2}\kappa s^2. \quad (47)$$

Aquí hemos redefinido  $s$  y  $t$ ,

$$\frac{s}{l} \rightarrow s, \quad \sqrt{\frac{g}{l}} t \rightarrow t, \quad (48)$$

y hemos introducido los parámetros adimensionales

$$\mu = \frac{m}{M}, \quad \kappa = \frac{lk}{gM}. \quad (49)$$



El lagrangiano de pequeñas oscilaciones para el punto de equilibrio  $\varphi = 0$  y  $s = 0$  es

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2}(1 + \mu)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\mu(\dot{s}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{s}) - \frac{1}{2}(1 + \mu)\varphi^2 - \mu s\varphi - \frac{1}{2}\kappa s^2. \quad (50)$$

Notar en especial que el término proporcional a  $s^2\dot{\varphi}^2$  en la Ec. (47) es de orden cuatro en los desplazamientos y, por lo tanto, no pertenece al lagrangiano de pequeñas oscilaciones, que por definición es cuadrático en los desplazamientos.

A partir de la Ec. (50) vemos que las matrices de energía cinética y de potencial son

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 + \mu & \mu \\ \mu & \mu \end{pmatrix}, \quad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 + \mu & \mu \\ \mu & \kappa \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Tenemos que resolver la ecuación de autovectores y autovalores

$$(\lambda\mathbb{T} - \mathbb{V})\mathbf{A} = 0. \quad (52)$$

Para eso escribimos el determinante de  $\lambda\mathbb{T} - \mathbb{V}$ ,

$$\begin{aligned} \det(\lambda\mathbb{T} - \mathbb{V}) &= \begin{vmatrix} (1 + \mu)(\lambda - 1) & \mu(\lambda - 1) \\ \mu(\lambda - 1) & \mu\lambda - \kappa \end{vmatrix} = (\lambda - 1) [(1 + \mu)(\mu\lambda - \kappa) - \mu^2(\lambda - 1)] \\ &= (\lambda - 1) [\mu\lambda - (1 + \mu)\kappa + \mu^2]. \end{aligned} \quad (53)$$

Las raíces de esta cuadrática son

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\kappa - \mu. \quad (54)$$

Restituyendo las constantes dimensionales, las frecuencias propias resultan

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{(1 + \mu)\frac{\kappa}{m} - \mu\frac{g}{l}}. \quad (55)$$

Un comentario al margen, que bien podría haber sido una de las preguntas del parcial, es acerca de la estabilidad del punto de equilibrio. Si la frecuencia  $\omega_2$  es imaginaria, cosa que no es difícil ver que puede ocurrir, el punto de equilibrio es en realidad inestable. En tal caso, el formalismo de pequeñas oscilaciones no es aplicable, aunque esto tampoco significa que no dé ninguna información. Por ejemplo, nos dice algo acerca de la estabilidad del punto de equilibrio.

El primer autovector se obtiene a simple vista,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

La ecuación que determina las componentes  $a$  y  $b$  del segundo autovector es, luego de algunas cancelaciones inquietantes en donde  $\kappa$  desaparece del problema,

$$(1 + \mu)a + \mu b = 0. \quad (57)$$

Podemos elegir

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -\mu \\ 1 + \mu \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Es fácil comprobar que

$$\mathbf{A}_1 \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{A}_2) = 0, \quad \mathbf{A}_1 \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{A}_1) = 1 + \mu, \quad \mathbf{A}_2 \cdot (\mathbb{T} \cdot \mathbf{A}_2) = \mu(1 + \mu). \quad (59)$$

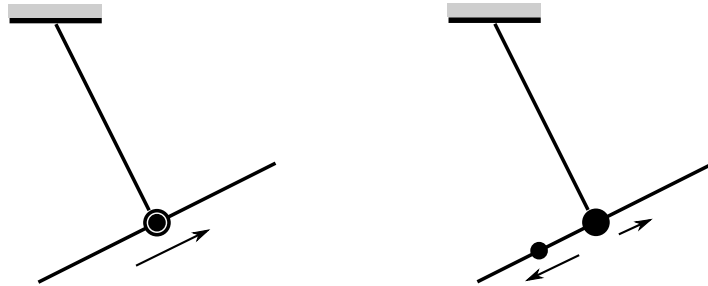
De manera que podemos definir los autovectores normalizados

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \mu}} \mathbf{A}_1 \rightarrow \mathbf{A}_1, \quad \frac{1}{\sqrt{\mu(1 + \mu)}} \mathbf{A}_2 \rightarrow \mathbf{A}_2. \quad (60)$$

La solución general del problema de pequeñas oscilaciones será

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \varphi \\ s \end{pmatrix} = \alpha_1 \cos(\omega_1 t + \beta_1) \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \cos(\omega_2 t + \beta_2) \mathbf{A}_2. \quad (61)$$

Cada término en esta ecuación representa un modo normal. Gráficamente tendremos algo como lo que muestra la figura.



En el primer modo, las dos partículas realizan el mismo movimiento, con la frecuencia del péndulo de longitud  $l$ . En el segundo modo, la coordenada  $s$  de la partícula de masa  $m$  evoluciona a contrafase del ángulo  $\varphi$ .

Como en todos los problemas de pequeñas oscilaciones, la Ec. (61) puede leerse como una transformación de coordenadas,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \varphi \\ s \end{pmatrix} = \xi_1 \mathbf{A}_1 + \xi_2 \mathbf{A}_2. \quad (62)$$

Así, las coordenadas normales están definidas por el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \mathbf{A}_1 \cdot (\mathbb{T} \cdot \boldsymbol{\eta}) = \sqrt{1+\mu} \varphi + \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu}} s, \\ \xi_2 &= \mathbf{A}_2 \cdot (\mathbb{T} \cdot \boldsymbol{\eta}) = \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} s.\end{aligned}\tag{63}$$

Las relaciones inversas se leen directamente de la Ec. (62),

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} \xi_1 - \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} \xi_2, \quad s = \sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}} \xi_2.\tag{64}$$

En realidad, como el sistema de ecuaciones es tan sencillo, tanto las relaciones inversas como las directas pueden obtenerse a partir de la Ec. (62), sin necesidad de aplicar las fórmulas de la Ec. (63).

Siempre conviene verificar que el lagrangiano de pequeñas oscilaciones escrito en las coordenadas normales adopta la forma esperada. La sustitución de las Ecs. (64) en el lagrangiano (50) da

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{osc}} &= \frac{1}{2} (1+\mu) \left( \frac{\dot{\xi}_1}{\sqrt{1+\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} \dot{\xi}_2 \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \mu \left[ \frac{1+\mu}{\mu} \dot{\xi}_2^2 + 2 \left( \frac{\dot{\xi}_1}{\sqrt{1+\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} \dot{\xi}_2 \right) \sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}} \dot{\xi}_2 \right] \\ &- \frac{1}{2} (1+\mu) \left( \frac{\xi_1}{\sqrt{1+\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} \xi_2 \right)^2 \\ &- \mu \sqrt{\frac{1+\mu}{\mu}} \xi_2 \left( \frac{\xi_1}{\sqrt{1+\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} \xi_2 \right) - \frac{1}{2} \kappa \frac{1+\mu}{\mu} \xi_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{2} \dot{\xi}_2^2 - \frac{1}{2} \xi_1^2 - \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) \kappa - \mu \right] \xi_2^2.\end{aligned}\tag{65}$$

El aspecto de esta ecuación es imponente, pero en la práctica es sencillo agrupar los términos que corresponden a cada producto  $\dot{\xi}_i \dot{\xi}_j$  en la energía cinética, o a cada producto  $\xi_i \xi_j$  en la energía potencial. La forma final del lagrangiano está desacoplada, y cada coordenada evoluciona con su propia frecuencia,

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2} \left( \dot{\xi}_1^2 - \lambda_1 \xi_1^2 \right) + \frac{1}{2} \left( \dot{\xi}_2^2 - \lambda_2 \xi_2^2 \right).\tag{66}$$