Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Guía 8: *Ecuación de Hamilton–Jacobi. Separación de variables.*[*]

1. Trasfondo: la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo

Aunque el problema de la separabilidad de la ecuación de H–J puede tratarse desde la perspectiva de la función S, en estas notas estaremos especialmente interesados en la ecuación de H–J independiente del tiempo y en la función W. Empecemos, entonces, con un brevísimo repaso del método de H–J aplicado a sistemas conservativos. Hemos visto que para estos sistemas es posible obtener la solución de las ecuaciones de movimiento a partir de la ecuación de H–J para la función característica de Hamilton,

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right) = E. \tag{1}$$

Para eso, uno tiene que ser capaz encontrar una solución de la ecuación anterior que dependa de n parámetros, donde n es el número de grados de libertad. Evidentemente, uno de esos parámetros será E. Reservando el lugar de α_1 para E, llamemos a esos parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Los designaremos simplemente con el símbolo $\boldsymbol{\alpha}$. Ninguno de estos parámetros puede ser meramente aditivo. La solución así hallada,

$$W = W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}), \tag{2}$$

considerada con una función generatriz de tipo F_2, conduce al hamiltoniano

$$H(\boldsymbol{\alpha}) = H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{q}}\right) = \alpha_1 = E. \tag{3}$$

O, dicho con menos vueltas,

$$H(E) = E. \tag{4}$$

El lugar de los nuevos impulsos está ocupado por los parámetros $\boldsymbol{\alpha}$. El hamiltoniano es función únicamente del primero de ellos, $\alpha_1 = E$.

Las ecuaciones de transformación para las nuevas coordenadas son

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}. \tag{5}$$

[*]zanellaj@df.uba.ar

Su dinámica es trivial,

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial H(E)}{\partial E} = 1, \qquad \dot{Q}_i = \frac{\partial H(E)}{\partial \alpha_i} = 0, \qquad i > 1. \tag{6}$$

De manera que

$$Q_1 = t - t_0, \tag{7}$$

y el resto de las coordenadas Q_i son constantes. Combinando estos resultados con la Ec. (5), obtenemos un conjunto n ecuaciones que involucran a las n coordenadas originales, al tiempo, a las n constantes $\boldsymbol{\alpha}$ y a las n constantes t_0, $Q_2, \ldots Q_n$,

$$\begin{cases} t - t_0 = \dfrac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial E}, \\[2ex] Q_i = \dfrac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i}, \qquad i > 1. \end{cases} \tag{8}$$

En principio, esto permite escribir las n coordenadas $\mathbf{q}$ en términos del tiempo y de $2n$ constantes, que son las que se necesitan para fijar las condiciones iniciales.

Así que, no sólo hay que resolver la ecuación diferencial (1), sino que en el proceso de resolverla es necesario que aparezcan n parámetros independientes, ninguno de ellos meramente aditivo. La manera típica en que aparecen esos parámetros es mediante separación de variables. Primero definiremos qué significa que la ecuación de H–J sea separable, luego trataremos el caso de las coordenadas cíclicas, que son trivialmente separables y, finalmente, veremos ejemplos en donde la separabilidad no es evidente a primera vista.

2. Separación de variables

En general, mediante el método de separación de variables, uno busca encontrar una solución de la ecuación de H–J que sea de la forma

$$W(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i)\,, \tag{9}$$

donde cada función W_i satisface una ecuación diferencial ordinaria,

$$D_i\Big[W(q_i)\,, q_i\Big] = 0, \tag{10}$$

para ciertos operadores diferenciales $D_i[\;\cdot\;, q_i]$. Si tal descomposición existe, se dice que la ecuación de H–J es completamente separable. No hay un criterio sencillo para saber cuándo esto es posible. Además, la separabilidad depende de la elección de las coordenadas. Por ejemplo, el problema de Kepler es separable en coordenadas esféricas pero no en coordenadas cartesianas. En contraste, otro problema de fuerzas centrales, esta vez el problema del oscilador isótropo tridimensional, es separable tanto en coordenadas esféricas como cartesianas. En problemas con campos electromagnéticos, la separabilidad también depende de la elección del *gauge*.

La separabilidad puede ser parcial. En lugar de escribir W como la suma de n funciones que dependen cada una de una coordenada, hay ciertas coordenadas que pueden separarse y otras que no. Por ejemplo, si las últimas k coordenadas pueden separarse,

$$W(\mathbf{q}) = \mathcal{W}(q_1, \ldots, q_{n-k}) + \sum_{i=n-k+1}^{n} W_i(q_i), \tag{11}$$

y cada W_i satisface una ecuación diferencial ordinaria. Veremos primero el caso más sencillo de separabilidad, que es el de las coordenadas cíclicas.

3. Coordenadas cíclicas

El caso más sencillo de separabilidad es el de las coordenadas cíclicas. Tomemos como ejemplo un sistema con dos grados de libertad, descripto por coordenadas q_1 y q_2 e impulsos p_1 y p_2. Supongamos que la coordenada q_2 es cíclica, entonces

$$H = H(q_1, p_1, p_2). \tag{12}$$

Por lo tanto, la ecuación de H–J se escribe como

$$H\left(q_1, \frac{\partial W(q_1, q_2)}{\partial q_1}, \frac{\partial W(q_1, q_2)}{\partial q_2}\right) = E. \tag{13}$$

Entonces uno propone para W la siguiente forma

$$W(q_1, q_2) = \alpha_2 q_2 + W_1(q_1), \tag{14}$$

donde α_2 es una constante de separación. Reemplazando en la ecuación de H–J, resulta

$$H\big(q_1, W_1'(q_1), \alpha_2\big) = E. \tag{15}$$

De manera que hemos reducido una ecuación diferencial en derivadas parciales a una ecuación diferencial ordinaria. En general, hallaremos soluciones de la forma

$$W_1 = W_1(q_1, E, \alpha_2). \tag{16}$$

Así habremos cumplido el objetivo de encontrar una solución de la ecuación de H–J que dependa de dos parámetros,

$$W(q_1, q_2, E, \alpha_2) = \alpha_2 q_2 + W_1(q_1, E, \alpha_2). \tag{17}$$

Los problemas 3, 4, 5 y 7 proporcionan ejemplos de este procedimiento justamente para sistemas con dos grados de libertad.

En general, si las k últimas coordenadas son cíclicas, propondremos una solución

$$W(\mathbf{q}) = W(q_1, \ldots, q_{n-k}) + \sum_{i=n-k+1}^{n} \alpha_i q_i. \tag{18}$$

Las constantes de separación α_i que aparecen en esta ecuación tienen una interpretación inmediata. Si encontramos una solución completa de la ecuación de H–J, entonces, cuando consideremos a W como una función generatriz de tipo F_2, tendremos las siguientes ecuaciones de transformación

$$\mathbf{p} = \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{q}}. \tag{19}$$

Luego, para las coordenadas cíclicas valdrá

$$p_i = \alpha_i, \qquad i = n-k+1, \ldots, n. \tag{20}$$

Debido a esta propiedad, en lugar de las constantes α_i, escribiremos directamente los impulsos p_i. Los últimos k nuevos impulsos coinciden así con los impulsos originales.

A manera de ejemplo, el siguiente problema trata con un sistema de dos grados de libertad con una coordenada cíclica. Es el problema de una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia de un potencial central.

3.1. Problema 4

Una partícula de masa m se mueve en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ bajo la influencia de un potencial central $V(r)$. Separando la ecuación de H–J independiente del tiempo en coordenadas polares, encontrar las ecuaciones implícitas que determinan $r(t)$ y $r(\varphi)$. Mostrar que los mismos resultados se obtienen por los métodos elementales de Física 1.

■ **Solución**. En este problema hay dos grados de libertad y, cuando se usan coordenadas polares, una de las coordenadas es cíclica. El hamiltoniano es

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = H(r, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r). \tag{21}$$

La ecuación de H–J se escribe como

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial W(r,\varphi)}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{2mr^2}\left[\frac{\partial W(r,\varphi)}{\partial \varphi}\right]^2 + V(r) = E. \tag{22}$$

Puesto que la coordenada φ es cíclica, proponemos una solución de la forma

$$W(r, \varphi) = p_\varphi \varphi + \mathcal{W}(r). \tag{23}$$

Reemplazando en la Ec. (22),

$$\frac{\mathcal{W}'(r)^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r) = E. \tag{24}$$

El problema se reduce a una ecuación diferencial ordinaria para la función $\mathcal{W}$. La solución formal es

$$\mathcal{W}^{\pm}(r, E, p_\varphi) = \pm\sqrt{2m}\int_{r_0}^{r} dr\,\sqrt{E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - V(r)}. \tag{25}$$

El límite inferior de integración será en muchos casos una función de E y p_φ. Por simplicidad elegimos el mismo r_0 para las dos ramas de la solución. Hay una función $\mathcal{W}$ para cada signo de p_r. Noten especialmente que, al escribir la solución, E y p_φ pasan a formar parte de las variables de las que depende $\mathcal{W}^{\pm}$. El límite de integración r_0 no, porque, cuando no es una función de E y p_φ, su inclusión es equivalente a la de una constante aditiva.

Finalmente, la solución de la ecuación de H–J es

$$W^{\pm}(r, \varphi, E, p_\varphi) = p_\varphi\varphi \pm \sqrt{2m}\int_{r_0}^{r} dr\,\sqrt{E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - V(r)}. \tag{26}$$

Consideradas como funciones generatrices, cada una de estas funciones conduce al hamiltoniano

$$H\big(Q_1^{\pm}, Q_2^{\pm}, E, p_\varphi\big) = H(E) = E. \tag{27}$$

De manera que la dinámica de las nuevas variables es trivial. Los nuevos impulsos E y p_φ y las coordenadas $Q_2^{\pm}$ son constantes. Las nuevas coordenadas $Q_1^{\pm}$ satisfacen la ecuación

$$\dot{Q}_1^{\pm} = \frac{\partial H(E)}{\partial E} = 1 \quad \Rightarrow \quad Q_1^{\pm} = t - t_0^{\pm}. \tag{28}$$

La dinámica de las coordenadas originales se obtiene combinando estos resultados con las ecuaciones de transformación. Por un lado, tenemos

$$Q_1^{\pm} = \frac{\partial W^{\pm}(r, \varphi, E, p_\varphi)}{\partial E} = \frac{\partial \mathcal{W}^{\pm}(r, E, p_\varphi)}{\partial E} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - V(r)}}. \tag{29}$$

Usando la Ec. (28), resulta

$$t - t_0^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - V(r)}}. \tag{30}$$

Esta ecuación define implícitamente las funciones $r^{\pm}(t)$. Por otro lado, la segunda ecuación de transformación es

$$Q_2^{\pm} = \frac{\partial W^{\pm}(r, \varphi, E, p_\varphi)}{\partial p_\varphi} = \varphi + \frac{\partial \mathcal{W}^{\pm}(r, E, p_\varphi)}{\partial p_\varphi} = \varphi \mp \frac{1}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2}\frac{p_\varphi}{\sqrt{E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - V(r)}}. \tag{31}$$

Reordenando un poco los términos, queda

$$\varphi - Q_2^{\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2}\frac{p_\varphi}{\sqrt{E - \dfrac{p_\varphi^2}{2mr^2} - V(r)}}. \tag{32}$$

Esta es una relación entre las coordenadas φ y r. Obtenemos así la ecuación de la trayectoria. Esto es típico de los problemas conservativos. Una de las ecuaciones relaciona las coordenadas y el tiempo; el resto proporciona relaciones entre las coordenadas.

No hay nada especialmente revelador en las Ecs. (30) y (32). Son los mismos resultados que obtuvimos al tratar fuerzas centrales en la primera parte de la materia. Cuando vimos estos problemas, el punto de partida fue la conservación de la energía y del momento angular,

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + V(r) = E, \\ &m\dot{\varphi}r^2 = \ell. \end{aligned} \tag{33}$$

Usando la segunda ecuación para eliminar $\dot{\varphi}$ y reemplazando en la primera, queda

$$\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = E. \tag{34}$$

De aquí despejamos

$$dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dr}{\sqrt{E - \dfrac{\ell^2}{2mr^2} - V(r)}}. \tag{35}$$

Integrando,

$$t - t_0^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{E - \dfrac{\ell^2}{2mr^2} - V(r)}}. \tag{36}$$

El único cuidado que no tuvimos en aquel entonces fue el de escribir dos constantes de integración diferentes para cada rama de la solución. Haciendo la identificación $\ell = p_\varphi$, es claro que volvemos a obtener la Ec. (30) por medios que están al alcance de un alumno de Física 1. En la Ec. (35), vemos que el significado de los signos $\pm$ es el mismo que el que tienen en la Ec. (30). Usando el hecho de que $p_r = m\dot{r}$, el signo positivo corresponde a $p_r \geqslant 0$ y el signo negativo corresponde a $p_r \leqslant 0$.

Para obtener la ecuación de la órbita, primero usamos la conservación del momento angular para reescribir $\dot{r}$ como

$$\dot{r} = \dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{37}$$

Entonces la Ec. (34) se lee como

$$\frac{\ell^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = E. \tag{38}$$

De aquí despejamos

$$d\varphi = \pm\frac{1}{\sqrt{2m}}\frac{dr}{r^2}\frac{\ell}{\sqrt{E - \dfrac{\ell^2}{2mr^2} - V(r)}}. \tag{39}$$

Lo que no está del todo claro en esta ecuación es que los signos $\pm$ tengan la misma interpretación que con el método de H–J. La ecuación de conservación del momento angular implica que $\dot\varphi$ tiene el mismo signo que ℓ. Para que eso sea cierto, el signo positivo en la ecuación anterior tiene que corresponder al caso en que $\dot r \geqslant 0$, y viceversa. Así que, después de todo, los signos $\pm$ tienen el mismo significado que les dimos al aplicar el método de H–J. Integrando la Ec. (39),

$$\varphi - \varphi_0^{\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2}\frac{\ell}{\sqrt{E - \dfrac{\ell^2}{2mr^2} - V(r)}}, \tag{40}$$

que es equivalente a la Ec. (32).

Las coordenadas cíclicas proporcionan el ejemplo más sencillo de separabilidad. Cuando uno se enfrenta a un problema nuevo, no existen criterios simples para saber si la ecuación de H–J es separable. Para complicar las cosas, la separabilidad depende de la elección particular de las coordenadas. Muchas veces el problema se resuelve mediante un inspirado cambio de coordenadas. El problema 8 de la guía presenta algunos casos paradigmáticos de separabilidad. En el problema 9 escribiremos y resolveremos la ecuación de H–J para un sistema relativista usando separación de variables.

4. Problema 8

Mostrar que en los siguientes casos la ecuación de H–J es separable:

a) En coordenadas esféricas, una partícula de masa m en un potencial central $V(r)$.

b) En coordenadas cilíndricas, una partícula de masa m en el potencial de Hooke.

c) Usando los ángulos de Euler, un giróscopo.

d) En coordenadas esféricas, una partícula de masa m en un potencial de la forma

$$V(\mathbf{r}) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}.$$

Sólo resolveremos aquí los ítems a) y c).

4.1. Partícula en un potencial central

En coordenadas esféricas, el hamiltoniano de una partícula de masa m en un potencial central $V(r)$ es

$$H(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r). \tag{41}$$

En este caso, la ecuación de H–J es

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial W(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{2mr^2}\left[\frac{\partial W(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\right]^2 + \frac{1}{2mr^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial W(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\right]^2 + V(r) = E. \tag{42}$$

La coordenada φ es cíclica, de modo que podemos separarla inmediatamente proponiendo

$$W(r,\theta,\varphi) = \varphi p_\varphi + \mathcal{W}(r,\theta). \tag{43}$$

La ecuación de H–J se lee entonces como

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial \mathcal{W}(r,\theta)}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{2mr^2}\left[\frac{\partial \mathcal{W}(r,\theta)}{\partial \theta}\right]^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + V(r) = E. \tag{44}$$

Ahora intentamos separar las variables r y θ escribiendo

$$\mathcal{W}(r,\theta) = W_r(r) + W_\theta(\theta). \tag{45}$$

Sustituyendo en la Ec. (44), queda

$$\frac{W_r'(r)^2}{2m} + \frac{W_\theta'(\theta)^2}{2mr^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} = E. \tag{46}$$

En forma muy gráfica, lo que hay que tratar de hacer es separar las variables r y θ. Multiplicando por r^2 y reagrupando términos, resulta

$$r^2\left[\frac{W_r'(r)^2}{2m} + V(r) - E\right] + \frac{W_\theta'(\theta)^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\sin^2\theta} = 0. \tag{47}$$

Tenemos así la suma de una función de r y una función de θ cuyo resultado es cero. Esto sólo puede ser cierto si estas funciones son iguales a $-\alpha$ y α, donde α es una constante,

$$\begin{aligned} r^2\left[\frac{W_r'(r)^2}{2m} + V(r) - E\right] &= -\alpha, \\ \frac{W_\theta'(\theta)^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2m\sin^2\theta} &= \alpha. \end{aligned} \tag{48}$$

Hemos encontrado entonces las dos ecuaciones diferenciales ordinarias que satisfacen las funciones W_r y W_θ,

$$\begin{aligned} \frac{W_r'(r)^2}{2m} + \frac{\alpha}{r^2} + V(r) = E, \\ W_\theta'(\theta)^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = 2m\alpha. \end{aligned} \tag{49}$$

Esto no sólo muestra que el sistema es separable, sino que también nos permite descubrir una nueva constante de movimiento. Que el sistema fuera conservativo asegura la conservación de H. Que la coordenada φ fuera cíclica asegura la conservación de p_φ. Ahora, el hecho de que la ecuación de H–J sea separable para r y θ implica la conservación de una tercera cantidad. Cuando la función W sea tratada como una función generatriz de tipo F_2, tendremos que

$$\frac{\partial W(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta} = W_\theta'(\theta) = p_\theta. \tag{50}$$

Entonces la segunda Ec. (49) se leerá como

$$p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = 2m\alpha. \tag{51}$$

Esto tiene la forma de una ley de conservación. Escribiendo p_θ y p_φ en términos de las velocidades y de las coordenadas, es fácil verificar (ejercicio) que el miembro de la izquierda es igual el módulo al cuadrado del momento angular, de modo que

$$\alpha = \frac{\ell^2}{2m}. \tag{52}$$

La constante α tiene, así, una interpretación física inmediata. Esto da a las Ecs. (49) un aspecto más familiar,

$$\begin{aligned} \frac{W_r'(r)^2}{2m} + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = E, \\ W_\theta'(\theta)^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \ell^2. \end{aligned} \tag{53}$$

Escribiremos las soluciones de estas ecuaciones como

$$\begin{aligned} W_r &= W_r(r, E, \ell), \\ W_\theta &= W_\theta(\theta, p_\varphi, \ell). \end{aligned} \tag{54}$$

Con esto nos desentendemos un poco de la proliferación de signos $\pm$ que surgirían al escribir explícitamente las expresiones formales de estas funciones. La función W será

$$W(r,\theta,\varphi,E,p_\varphi,\ell) = p_\varphi\varphi + W_r(r,E,\ell) + W_\theta(\theta,p_\varphi,\ell). \tag{55}$$

Para ver cómo la dinámica de las coordenadas originales está cifrada en esta función, escribamos las ecuaciones de transformación para las nuevas coordenadas:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{\partial W(r,\theta,\varphi,E,p_\varphi,\ell)}{\partial E} = \frac{\partial W_r(r,E,\ell)}{\partial E},\\
Q_2 &= \frac{\partial W(r,\theta,\varphi,E,p_\varphi,\ell)}{\partial p_\varphi} = \varphi + \frac{\partial W_\theta(\theta,p_\varphi,\ell)}{\partial p_\varphi},\\
Q_3 &= \frac{\partial W(r,\theta,\varphi,E,p_\varphi,\ell)}{\partial \ell} = \frac{\partial W_r(r,E,\ell)}{\partial \ell} + \frac{\partial W_\theta(\theta,p_\varphi,\ell)}{\partial \ell}.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Por otro lado, la dinámica de las nuevas coordenadas es trivial: Q_2 y Q_3 son constantes, y

$$
Q_1 = t - t_0. \tag{57}
$$

Así, las Ecs. (56), levemente reescritas, se leen como

$$
\begin{cases}
t - t_0 = \dfrac{\partial W_r(r,E,\ell)}{\partial E},\\[2ex]
\varphi = -\dfrac{\partial W_\theta(\theta,p_\varphi,\ell)}{\partial p_\varphi} + Q_2,\\[2ex]
\dfrac{\partial W_r(r,E,\ell)}{\partial \ell} + \dfrac{\partial W_\theta(\theta,p_\varphi,\ell)}{\partial \ell} - Q_3 = 0.
\end{cases}
\tag{58}
$$

La primera ecuación define de manera implícita r como función de t. La segunda da directamente φ como función de θ. La tercera ecuación proporciona una relación entre r y θ. Es evidente que combinando estas ecuaciones podemos obtener también $\theta(t)$ y $\varphi(t)$. La solución depende de seis constantes, E, p_φ, ℓ, Q_2, Q_3 y t_0, que es el número de constantes necesarias para fijar las condiciones iniciales en un problema con tres grados de libertad.

4.2. Giróscopo

Consideremos un giróscopo, usando como coordenadas los ángulos de Euler. Deben estar seguros de que saben demostrar que el hamiltoniano es

$$
H(\varphi,\theta,\psi,p_\varphi,p_\theta,p_\psi) = \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta}. \tag{59}
$$

En todo caso, tómense dos minutos y dedúzcanlo. La separación de este problema es trivial. Las coordenadas φ y ψ son cíclicas, de modo que la función W se separa como

$$
W(\varphi,\theta,\psi) = p_\varphi\varphi + p_\psi\psi + \mathcal{W}(\theta). \tag{60}
$$

La ecuación de H–J se reduce a la siguiente ecuación diferencial ordinaria para $\mathcal{W}$

$$
\frac{\mathcal{W}'(\theta)^2}{2I} + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}. \tag{61}
$$

La función W dependerá del número suficiente de parámetros: E, p_φ y p_ψ.

5. Partícula relativista en un campo electromagnético

Como preparación para el problema 9, calculemos primero, en coordenadas esféricas, el hamiltoniano relativista de una partícula cargada en un campo electromagnético. En coordenadas esféricas, el lagrangiano de una partícula relativista en un campo electromagnético caracterizado por potenciales $\mathbf{A}$ y Φ es

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - e\Phi, \tag{62}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\sin\theta\ \dot{\varphi}\ \hat{\varphi}, \\ v^2 &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2. \end{aligned} \tag{63}$$

Los impulsos conjugados son

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\gamma\dot{r} + \frac{e}{c}A_r, \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\gamma r^2\dot{\theta} + \frac{e}{c}rA_\theta, \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\gamma r^2\sin^2\theta\ \dot{\varphi} + \frac{e}{c}r\sin\theta\ A_\varphi. \end{aligned} \tag{64}$$

No tenemos que olvidar que γ es una función de la velocidad. Hay que encontrar la forma de eliminar las velocidades en favor de los impulsos. Aquí resulta útil la identidad

$$\gamma^2 = \gamma^2\beta^2 + 1. \tag{65}$$

A partir de las Ecs. (64), obtenemos

$$m^2c^2\gamma^2\beta^2 = \left(p_r - \frac{e}{c}A_r\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta - \frac{e}{c}rA_\theta\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{e}{c}r\sin\theta\ A_\varphi\right)^2. \tag{66}$$

Usando entonces la identidad (65), queda

$$m^2c^2\gamma^2 = \left(p_r - \frac{e}{c}A_r\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta - \frac{e}{c}rA_\theta\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{e}{c}r\sin\theta\ A_\varphi\right)^2 + m^2c^2. \tag{67}$$

Reservemos este resultado.

Pasando al cálculo del hamiltoniano, primero escribamos las Ecs. (64) como

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{1}{m\gamma}\left(p_r - \frac{e}{c}A_r\right),\\
\dot{\theta} &= \frac{1}{m\gamma r^2}\left(p_\theta - \frac{e}{c}rA_\theta\right),\\
\dot{\varphi} &= \frac{1}{m\gamma r^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{e}{c}r\sin\theta\, A_\varphi\right).
\end{aligned} \tag{68}$$

Luego

$$\begin{aligned}
H &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L\\
&= \frac{1}{m\gamma}\left[p_r\left(p_r - \frac{e}{c}A_r\right) + \frac{p_\theta}{r^2}\left(p_\theta - \frac{e}{c}rA_\theta\right) + \frac{p_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{e}{c}r\sin\theta\, A_\varphi\right) + m^2c^2\right]\\
&\quad - \frac{e}{m\gamma c}\left[\left(p_r - \frac{e}{c}A_r\right)A_r + \frac{1}{r}\left(p_\theta - \frac{e}{c}rA_\theta\right)A_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\left(p_\varphi - \frac{e}{c}r\sin\theta\, A_\varphi\right)A_\varphi\right] + e\Phi.
\end{aligned} \tag{69}$$

El resultado final es bastante más simple que las expresiones intermedias,

$$H = \frac{1}{m\gamma}\left[\left(p_r - \frac{e}{c}A_r\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta - \frac{e}{c}rA_\theta\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{e}{c}r\sin\theta\, A_\varphi\right)^2 + m^2c^2\right] + e\Phi. \tag{70}$$

Esto se acaba cuando usamos el resultado (67),

$$H = c\sqrt{\left(p_r - \frac{e}{c}A_r\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta - \frac{e}{c}rA_\theta\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(p_\varphi - \frac{e}{c}r\sin\theta\, A_\varphi\right)^2 + m^2c^2} + e\Phi. \tag{71}$$

5.1. Problema 9

Mostrar que la ecuación de H–J para una partícula relativista de masa m y carga e en un potencial electrostático central $\Phi(r)$ es separable en coordenadas esféricas. Asumiendo que la partícula se mueve en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, encontrar la ecuación de la trayectoria $r(\varphi)$ en un potencial coulombiano atractivo, $e\Phi(r) = -k/r$, donde $k > 0$.

■ **Solución**. La Ec. (71) da el hamiltoniano de una partícula relativista cargada en un campo electromagnético externo. El problema 9 dice que sólo hay un potencial electrostático central, de modo que el hamiltoniano es

$$H = c\sqrt{p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta} + m^2c^2} + e\Phi(r). \tag{72}$$

Se trata de separar la ecuación de H–J para este hamiltoniano. La coordenada φ es cíclica, por lo tanto, escribimos

$$W(r, \theta, \varphi) = p_\varphi \varphi + W_r(r) + W_\theta(\theta). \tag{73}$$

La ecuación de H–J se lee entonces como

$$c\sqrt{\left[W_r'(r)^2 + \frac{W_\theta'(\theta)^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right] + m^2c^2} + e\Phi(r) = E. \tag{74}$$

No hay que desesperarse. Reagrupando términos y elevando al cuadrado, queda

$$\left[W_r'(r)^2 + \frac{W_\theta'(\theta)^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right] + m^2c^2 = \frac{1}{c^2}\Big[E - e\Phi(r)\Big]^2. \tag{75}$$

Multiplicando por r^2 y reagrupando,

$$r^2\left\{W_r'(r)^2 + m^2c^2 - \frac{1}{c^2}\Big[E - e\Phi(r)\Big]^2\right\} + W_\theta'(\theta)^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = 0. \tag{76}$$

Vemos entonces que la ecuación se separa. Por analogía con el caso no relativista, escribiremos la constante de separación como ℓ^2,

$$\begin{aligned} &r^2\left\{W_r'(r)^2 + m^2c^2 - \frac{1}{c^2}\Big[E - e\Phi(r)\Big]^2\right\} = -\ell^2, \\ &W_\theta'(\theta)^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = \ell^2. \end{aligned} \tag{77}$$

La ecuación para W_r puede reescribirse en una forma que recuerde el caso no relativista

$$\frac{W_r'(r)^2}{2m} + \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{Ee\Phi(r)}{mc^2} - \frac{1}{2m}\left[\frac{e\Phi(r)}{c}\right]^2 = \frac{E^2 - (mc^2)^2}{2mc^2}. \tag{78}$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la ecuación radial del problema no relativista de una partícula en un potencial central cuando el potencial $V(r)$ es

$$V(r) = \frac{Ee\Phi(r)}{mc^2} - \frac{1}{2m}\left[\frac{e\Phi(r)}{c}\right]^2. \tag{79}$$

Más que resolver un problema en particular, como propone el ejercicio, veremos cómo determinar con estos elementos la evolución del sistema. Resuelvan ustedes el caso en que

$$e\Phi(r) = -\frac{k}{r}. \tag{80}$$

Pueden comparar sus resultados con el problema de Coulomb relativista que resolvimos en la clase del 11 de mayo, que pueden consultar [aquí].

Reuniendo todos los resultados, la función W está dada por

$$W(r,\theta,\varphi,E,p_\varphi,\ell) = p_\varphi\varphi + W_r(r,E,\ell) + W_\theta(\theta,p_\varphi,\ell), \tag{81}$$

donde (haciendo caso omiso de la ambigüedad en los signos de las raíces cuadradas)

$$\begin{aligned} W_r(r,E,\ell) &= \sqrt{2m}\int^r dr\,\sqrt{\frac{E^2-(mc^2)^2}{2mc^2} - \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{Ee\Phi(r)}{mc^2} + \frac{1}{2m}\left[\frac{e\Phi(r)}{c}\right]^2}, \\ W_\theta(\theta,p_\varphi,\ell) &= \int^\theta d\vartheta\,\sqrt{\ell^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}}. \end{aligned} \tag{82}$$

Al aplicar la función W como función generatriz de tipo F_2, los nuevos impulsos serán E, p_φ y ℓ, y las nuevas coordenadas, Q_1, Q_2 y Q_3. Puesto que el nuevo hamiltoniano es $H(E) = E$,

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial H}{\partial E} = 1 \quad \Rightarrow Q_1 = t - t_0, \tag{83}$$

mientras que Q_2 y Q_3 son constantes. La dinámica de las coordenadas originales se obtiene a través de las ecuaciones de transformación,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial W}{\partial E} = \frac{\partial W_r}{\partial E}, \\ Q_2 &= \frac{\partial W}{\partial p_\varphi} = \varphi + \frac{\partial W_\theta}{\partial p_\varphi}, \\ Q_3 &= \frac{\partial W}{\partial \ell} = \frac{\partial W_r}{\partial \ell} + \frac{\partial W_\theta}{\partial \ell}. \end{aligned} \tag{84}$$

Explícitamente,

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}\,c^2}\int^r dr\,\frac{E - e\Phi(r)}{\sqrt{\frac{E^2-(mc^2)^2}{2mc^2} - \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{Ee\Phi(r)}{mc^2} + \frac{1}{2m}\left[\frac{e\Phi(r)}{c}\right]^2}} \tag{85}$$

Debido a que $Q_1 = t - t_0$, esta ecuación define implícitamente la función $r(t)$. La segunda ecuación de transformación se lee como

$$Q_2 = \varphi - p_\varphi\int^\theta d\vartheta\,\frac{1}{\sin^2\vartheta\sqrt{\ell^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}}}. \tag{86}$$

Esta ecuación da una relación entre las coordenadas φ y θ. Noten que no depende del potencial, así que su solución es universal y es, además, igual a la del caso no relativista. A pesar de su aspecto, es una integral sencilla. Prueben con la sustitución $u = \cot\theta$. Por último, la tercera ecuación de transformación es

$$
\begin{aligned}
Q_3 = -\frac{1}{\sqrt{2m}} \int^{r} dr \, &\frac{\ell/r^2}{\sqrt{\dfrac{E^2-(mc^2)^2}{2mc^2} - \dfrac{\ell^2}{2mr^2} - \dfrac{Ee\Phi(r)}{mc^2} + \dfrac{1}{2m}\left[\dfrac{e\Phi(r)}{c}\right]^2}} \\
&+ \int^{\theta} d\vartheta \, \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 - \dfrac{p_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}}}.
\end{aligned}
\tag{87}
$$

Esta ecuación proporciona una relación entre las coordenadas r y θ. De este modo podríamos, en principio, encontrar las funciones $r(t)$, $\theta(t)$ y $\varphi(t)$.

Una última observación. El problema pide que demuestren que la ecuación de H–J es separable en el caso general, pero luego pide que resuelvan el caso coulombiano cuando la partícula se mueve en el plano $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Para eso, en lugar de trabajar con coordenadas esféricas, planteen directamente el problema en coordenadas polares. Lo único que tendrán que hacer es reescribir el hamiltoniano (72) como

$$
H = c\sqrt{p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + m^2c^2} + e\Phi(r), \tag{88}
$$

de manera que la función W será de la forma

$$
W(r,\varphi) = p_\varphi \varphi + \mathcal{W}(r). \tag{89}
$$

Noten que el problema no les pide la evolución temporal, sino únicamente la ecuación de la trayectoria. Deberán analizar varios casos posibles, dependiendo de los valores de E y p_φ. En el caso no relativista, el problema de Coulomb atractivo tenía un único tipo de órbitas: elipses. En el problema relativista, eso ya no es cierto.