Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Guía 5: *Relatividad especial: el problema de Coulomb relativista*

Consideremos una partícula relativista de masa m y carga e en un campo electromagnético externo caracterizado por potenciales $\mathbf{A}$ y Φ. En general, sin especificar aún las coordenadas, el lagrangiano es

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} - e\Phi. \tag{1}$$

Si $\mathbf{A} = 0$ y $e\Phi(r) = -k/r$ con $k > 0$,

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{k}{r}. \tag{2}$$

Como L no depende explícitamente del tiempo, se conserva la función h. En este caso, deberían demostrar que

$$h = mc^2\gamma(v) - \frac{k}{r}. \tag{3}$$

La ley se conservación se puede escribir como

$$mc^2\gamma(v) = E + \frac{k}{r}. \tag{4}$$

Seamos un poco más particulares en la elección de las coordenadas. Si el movimiento tiene lugar en el plano $\theta = \frac{1}{2}\pi$, elijamos como coordenadas r y φ, de modo que

$$L(r,\varphi,\dot r,\dot\varphi) = -mc^2\sqrt{1-\frac{\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right)}{c^2}} + \frac{k}{r}. \tag{5}$$

Al igual que en el problema no relativista, el hecho de que L no dependa de φ implica la conservación de $\partial L/\partial\dot\varphi$, que en este caso se lee como

$$\gamma(v)mr^2\dot\varphi = l. \tag{6}$$

El problema con esta ecuación es que no nos termina de dar $\dot\varphi$ en términos de r y $\dot r$, porque aparece el factor γ, que también depende de $\dot\varphi$.

En resumen: las dos ecuaciones de conservación que tenemos hasta aquí son

$$\begin{aligned} mc^2\gamma(v) &= E + \frac{k}{r},\\ \gamma(v)mr^2\dot\varphi &= l. \end{aligned} \tag{7}$$

El objetivo es encontrar una ecuación para $r' = dr/d\varphi$. Escribamos la primera ecuación como

$$(mc^2)^2\gamma(v)^2 = \left(E + \frac{k}{r}\right)^2. \tag{8}$$

Ahora usemos que $\gamma^2 = 1 + \gamma^2\beta^2$, de modo que

$$\gamma^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}\left(r'^2 + r^2\right)\dot{\varphi}^2. \tag{9}$$

Usando la conservación de l para eliminar $\dot{\varphi}$, queda

$$\gamma^2 = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}\left(r'^2 + r^2\right)\frac{l^2}{m^2\gamma^2 r^4}. \tag{10}$$

Finalmente obtenemos una ecuación que nos da γ en términos de r' y r,

$$\gamma^2 = 1 + \frac{l^2}{c^2 m^2}\left(\frac{r'^2}{r^4} + \frac{1}{r^2}\right). \tag{11}$$

Reemplazando en la Ec. (8) el resultado que obtuvimos para γ^2, obtenemos una ecuación efectiva para r'. Vamos a escribirla en una forma parecida a la del problema no relativista:

$$\frac{l^2}{2m}\left(\frac{r'^2}{r^4} + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{2mc^2}\left(E + \frac{k}{r}\right)^2 - \frac{mc^2}{2}. \tag{12}$$

Reagrupando términos,

$$\frac{l^2}{2m}\left(\frac{1}{r^4}r'^2 + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{E}{mc^2}\frac{k}{r} - \frac{k^2}{2mc^2r^2} = \frac{1}{2mc^2}\left[E^2 - (mc^2)^2\right]. \tag{13}$$

Esto tiene la forma de un problema no relativista con un potencial coulombiano perturbado por un término centrífugo. Asociando todos los términos que van como r^{-2}, queda

$$\frac{l^2}{2m}\frac{r'^2}{r^4} + \frac{\bar{l}^2}{2mr^2} - \frac{\bar{k}}{r} = \bar{E}, \tag{14}$$

donde hemos definido

$$\frac{\bar{l}^2}{2m} = \frac{l^2}{2m}\left(1 - \frac{k^2}{c^2l^2}\right), \qquad \bar{k} = \frac{E}{mc^2}k, \qquad \bar{E} = \frac{1}{2mc^2}\left[E^2 - (mc^2)^2\right]. \tag{15}$$

Podemos resolver este problema como hicimos en la guía de fuerzas centrales, trabajando con la variable dependiente $u = r^{-1}$ y, en la hipótesis de que $\bar{l}^2$ es mayor que cero, introduciendo la variable independiente

$$\bar{\varphi} = \frac{\bar{l}}{l}\varphi \equiv \kappa\varphi, \tag{16}$$

de manera que nos queda el problema de Kepler usual:

$$\frac{\bar{l}^2}{2m}\left(u'^2 + u^2\right) - \bar{k}u = \bar{E}. \tag{17}$$

Eligiendo convenientemente las condiciones iniciales, de aquí resulta

$$r(\bar{\varphi}) = \frac{1}{1 + e\cos\bar{\varphi}}\frac{\bar{l}^2}{m\bar{k}}, \tag{18}$$

o, en términos de la variable angular original,

$$r(\varphi) = \frac{1}{1 + e\cos\kappa\varphi}\,\frac{\bar{l}^2}{m\bar{k}}. \tag{19}$$

Aquí, la excentricidad está dada por

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\bar{E}\bar{l}^2}{m\bar{k}^2}}, \tag{20}$$

y la relación que hay entre $\bar{l}$, a y e es

$$\frac{\bar{l}^2}{m\bar{k}} = a(1 - e^2). \tag{21}$$

La Ec. (19) es la ecuación de una elipse en precesión, lo que no significa necesariamente que la órbita tenga la apariencia de una elipse. El concepto de "elipse en precesión" está limitado a aquellos casos en los que el ángulo de precesión sea pequeño. De todas maneras, generalmente hablando, uno dice que la Ec. (19) es la ecuación de una elipse en precesión. El ángulo de precesión (no necesariamente pequeño) es

$$\delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{\kappa} - 1\right), \tag{22}$$

donde

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{k^2}{c^2 l^2}}. \tag{23}$$

En el caso no relativista, $c \to \infty$, $\kappa = 1$ y la precesión es nula. Asumiendo que la corrección relativista es pequeña, es decir, asumiendo que

$$\frac{k^2}{c^2 l^2} \ll 1, \tag{24}$$

resulta

$$\delta\varphi = \frac{\pi k^2}{c^2 l^2}. \tag{25}$$

Como de por sí este es un número pequeño, podemos usar aquí la relación no relativista que hay entre l, a y e,

$$l^2 = mka(1 - e^2), \tag{26}$$

de forma que

$$\delta\varphi = \frac{\pi k}{mc^2(1 - e^2)a}. \tag{27}$$

Es tentador extrapolar este resultado al problema del movimiento de una partícula de masa m en un potencial gravitatorio, donde $k = GMm$. Se obtiene entonces

$$\delta\varphi = \frac{\pi GM}{c^2(1-e^2)a}. \tag{28}$$

Este resultado es exactamente un sexto del valor predicho por la relatividad general, que es la teoría aceptada para tratar el problema del movimiento en un potencial gravitatorio.