

Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Guía 6: El disco de Feynman. Problemas 15 y 16.

...[e]staba yo en la cafetería, y un tipo que andaba haciendo el tonto por allí va y lanza una bandeja por el aire. Mientras la bandeja volaba dando vueltas, me fijé en que había en ella un escudo de Cornell. La bandeja giraba y se bamboleaba, y era evidente que el escudo giraba más rápidamente que el bamboleo. No tenía nada que hacer, así que me puse a calcular cuál sería el movimiento de la bandeja giratoria. Descubrí que cuando el ángulo es muy pequeño, la velocidad del giro del escudo es doble del ritmo de bamboleo. Una relación de 2 a 1. Así se deducía de una complicada ecuación.

(En “*Surely You’re Joking, Mr. Feynman!*”).

Disco de Feynman I. Un disco homogéneo es arrojado hacia arriba con un movimiento de rotación tal que $|\omega_3| \gg |\omega_1|, |\omega_2|$. Los momentos principales de inercia respecto del centro de masa son I_3 e $I_1 = I_2 \equiv I$. La dinámica se desacopla en una parte de traslación y otra de rotación; aquí sólo estaremos interesados en la rotación. Suponer que las condiciones iniciales son

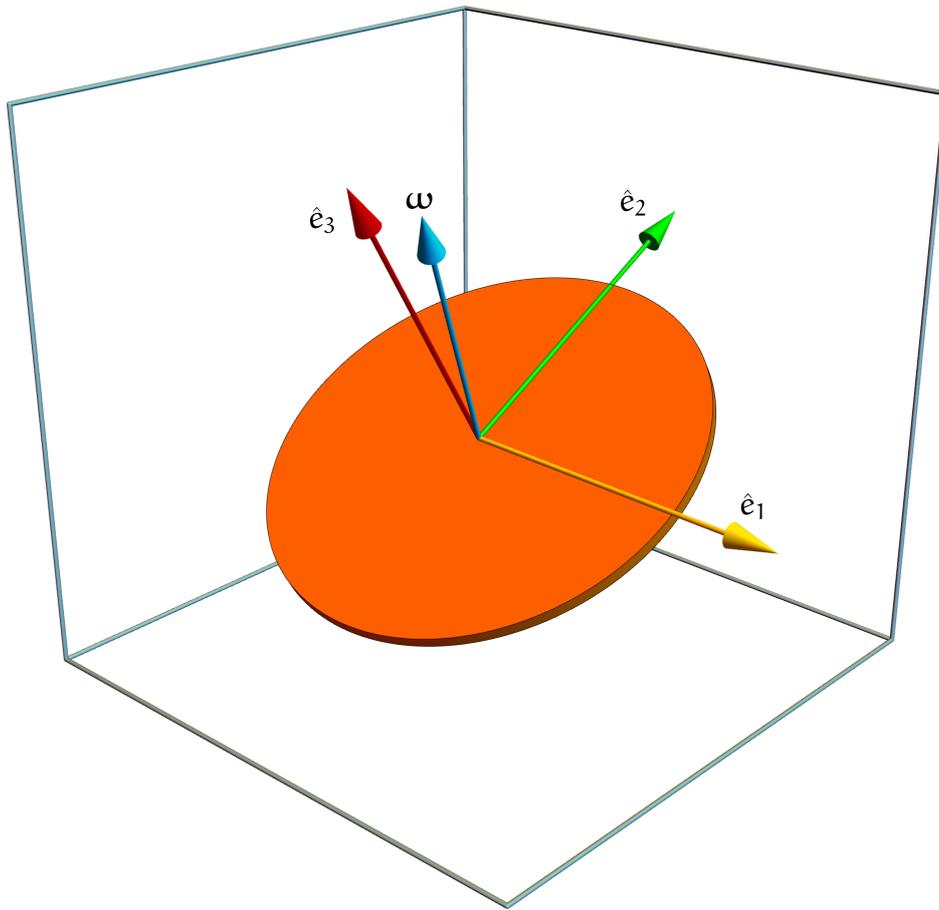
$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, & \theta(0) &= \theta_0, & \psi(0) &= 0, \\ \dot{\varphi}(0) &= 0, & \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0, & \dot{\psi}(0) &= \omega_3 \gg |\dot{\theta}_0|. \end{aligned}$$

- Escribir el lagrangiano de rotación usando los ángulos de Euler.
- Mediante las integrales de movimiento, definir un problema unidimensional para θ .
- Encontrar los ángulos de Euler en función del tiempo.
- Encontrar los versores \hat{e}_i en función del tiempo y demostrar que el versor \hat{e}_3 realiza un movimiento que tiene el doble de la frecuencia del movimiento de los versores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 . Asumir que, puesto que el disco es plano, $I_3 = 2I$. Aquí hay una [animación](#).

Solución. La figura de la página siguiente muestra el disco en el instante inicial. La parte rotacional del lagrangiano es la correspondiente a una peonza simétrica:

$$L = \frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta). \quad (1)$$

Considerando la rotación como un problema en sí mismo, hay tres constantes de movimiento evidentes: la energía, que es el propio lagrangiano, y los impulsos generalizados asociados



a los ángulos ψ y φ , debido a que son coordenadas cíclicas:

$$E = L,$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta), \quad (2)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = p_\psi \cos \theta + I \dot{\varphi} \sin^2 \theta.$$

Presten atención a la forma de escribir p_φ en términos de p_ψ y $\dot{\varphi}$. Como después esta ecuación va a servir para despejar $\dot{\varphi}$, expandir p_ψ sólo crea complicaciones innecesarias. Estas constantes de movimiento permiten construir un problema unidimensional para el ángulo θ . El punto de partida es la conservación de la energía,

$$\frac{I_3}{2} (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 + \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = E. \quad (3)$$

El primer término es simplemente $p_\psi^2/2I_3$,

$$\frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{I}{2} (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = E. \quad (4)$$

Usando la expresión que define p_φ en la Ec. (2) podemos eliminar $\dot{\varphi}$,

$$\frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta} = E. \quad (5)$$

De manera que la ecuación que determina la evolución de θ es

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I^2 \sin^2 \theta} = \frac{C}{2}. \quad (6)$$

Todo lo que necesitamos saber es que C es alguna constante. El problema para θ está gobernado por el potencial efectivo

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I \sin^2 \theta}. \quad (7)$$

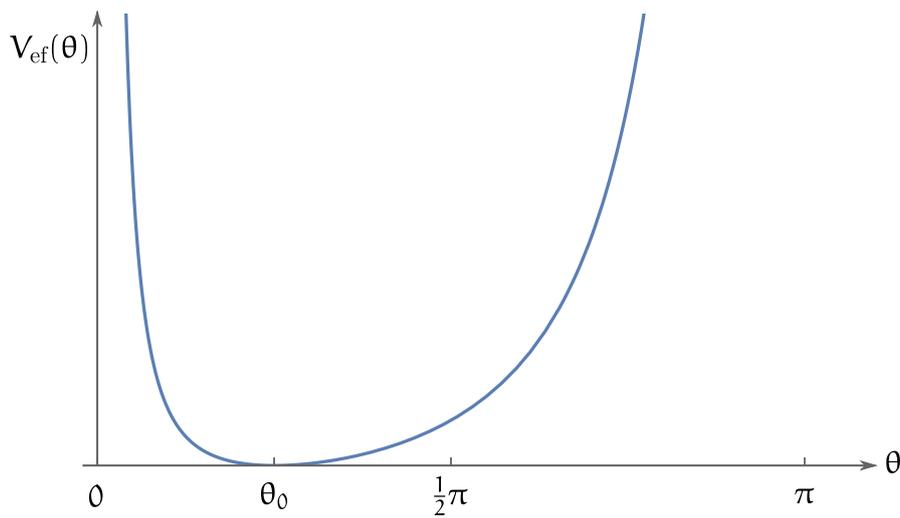
La forma precisa de este potencial está definida por las condiciones iniciales. De acuerdo a los datos del enunciado

$$p_\psi = I_3 \omega_3, \quad p_\varphi = I_3 \omega_3 \cos \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0. \quad (8)$$

De modo que la Ec. (6) se lee como

$$\dot{\theta}^2 + \left(\frac{I_3 \omega_3}{I} \right)^2 \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = \dot{\theta}_0^2. \quad (9)$$

No hace falta graficar el potencial para advertir que tiene un mínimo en $\theta = \theta_0$. Dicho esto, aquí hay un gráfico del potencial.



En el enunciado del problema se indica la condición $|\dot{\theta}_0| \ll \omega_3$. Así, para todo tiempo, cada término de la Ec. (9) tiene que ser mucho menor que ω_3^2 ; en particular

$$\frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \ll 1. \quad (10)$$

Es razonable asumir que $|\theta - \theta_0| \ll 1$. De manera que consideraremos el problema de las pequeñas oscilaciones alrededor de θ_0 . Escribamos

$$\theta = \theta_0 + \delta\theta \quad (11)$$

y desarrollemos la Ec. (9) hasta orden cuadrático en $\delta\theta$,

$$\delta\dot{\theta}^2 + \left(\frac{I_3\omega_3}{I}\right)^2 \delta\theta^2 = \dot{\theta}_0^2. \quad (12)$$

Puesto que $\theta(0) = \theta_0$, debe ser $\delta\theta(0) = 0$ y, por lo tanto,

$$\delta\theta(t) = \delta\theta_0 \sin \Omega t, \quad (13)$$

donde

$$\Omega = \frac{I_3}{I} \omega_3, \quad (14)$$

y donde

$$\delta\theta_0 = \frac{\dot{\theta}_0}{\Omega}, \quad (15)$$

que es, por las hipótesis contenidas en el enunciado, mucho menor que uno en valor absoluto. Esto prueba que, en efecto, $|\delta\theta| \ll 1$, tal como habíamos supuesto.

Hemos resuelto el problema para el ángulo θ . Veamos ahora qué pasa con los otros dos ángulos. Conocido θ , las ecuaciones de conservación (2) determinan ψ y φ :

$$\begin{aligned} \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta &= \frac{p_\psi}{I_3} = \omega_3, \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi - p_\psi \cos \theta}{I \sin^2 \theta} = \frac{I_3 \omega_3 (\cos \theta_0 - \cos \theta)}{I \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (16)$$

Debido a que $|\theta - \theta_0| \ll 1$, mientras $\sin \theta_0$ no sea muy próximo a cero, la velocidad $\dot{\varphi}$ será en valor absoluto mucho menor que ω_3 . A más bajo orden, el par de ecuaciones anteriores se leerá como

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \omega_3, \\ \dot{\varphi} &= \frac{I_3 \omega_3}{I \sin \theta_0} \delta\theta = \frac{\Omega}{\sin \theta_0} \delta\theta_0 \sin \Omega t. \end{aligned} \quad (17)$$

En la última igualdad usamos la Ec. (14). Entonces, puesto que $\psi(0) = \varphi(0) = 0$,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \omega_3 t, \\ \varphi(t) &= \frac{\delta\theta_0}{\sin \theta_0} (1 - \cos \Omega t). \end{aligned} \quad (18)$$

Una vez que conocemos los ángulos de Euler, podemos escribir los versores \hat{e}_i ,

$$\begin{aligned}\hat{e}_1(\varphi, \theta, \psi) &= \cos \psi \hat{\rho}(\varphi) + \sin \psi [\cos \theta \hat{\varphi}(\varphi) + \sin \theta \hat{z}], \\ \hat{e}_2(\varphi, \theta, \psi) &= -\sin \psi \hat{\rho}(\varphi) + \cos \psi [\cos \theta \hat{\varphi}(\varphi) + \sin \theta \hat{z}], \\ \hat{e}_3(\varphi, \theta) &= \cos \theta \hat{z} - \sin \theta \hat{\varphi}(\varphi).\end{aligned}\tag{19}$$

Para ver la evolución de \hat{e}_1 y \hat{e}_2 es suficiente con aproximar θ por θ_0 y φ por cero,

$$\begin{aligned}\hat{e}_1(t) &= \cos \omega_3 t \hat{x} + \sin \omega_3 t \hat{\psi}_0, \\ \hat{e}_2(t) &= -\sin \omega_3 t \hat{x} + \cos \omega_3 t \hat{\psi}_0,\end{aligned}\tag{20}$$

donde el versor constante $\hat{\psi}_0$ está dado por

$$\hat{\psi}_0 = \cos \theta_0 \hat{y} + \sin \theta_0 \hat{z}.\tag{21}$$

Así, lo que hemos encontrado es que los versores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 rotan con frecuencia angular ω_3 en el plano definido por \hat{x} y $\hat{\psi}_0$. Los versores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 en el instante inicial están dados por

$$\begin{aligned}\hat{e}_{10} &= \hat{x}, \\ \hat{e}_{20} &= \hat{\psi}_0,\end{aligned}\tag{22}$$

Con esto a la vista, podemos reescribir las Ecs. (20) como

$$\begin{aligned}\hat{e}_1(t) &= \cos \omega_3 t \hat{e}_{10} + \sin \omega_3 t \hat{e}_{20}, \\ \hat{e}_2(t) &= -\sin \omega_3 t \hat{e}_{10} + \cos \omega_3 t \hat{e}_{20}.\end{aligned}\tag{23}$$

Para encontrar la evolución del versor \hat{e}_3 no es suficiente aproximar θ por θ_0 y φ por cero, debido a que en tal caso obtenemos simplemente un vector constante. Lo mismo ocurre si intentamos calcular \hat{e}_3 haciendo el producto vectorial de \hat{e}_1 con \hat{e}_2 usando las expresiones (23). Toda la evolución temporal de \hat{e}_3 está en las correcciones. Usando las expresiones (13) y (18) en la última Ec. (19), queda, a primer orden en la aproximación,

$$\hat{e}_3(t) = \hat{e}_{30} - \delta\theta_0 \sin \theta_0 \sin \Omega t \hat{z} - \delta\theta_0 \cos \theta_0 \sin \Omega t \hat{y} + \delta\theta_0(1 - \cos \Omega t) \hat{x},\tag{24}$$

donde

$$\hat{e}_{30} = \hat{e}_3(0) = \cos \theta_0 \hat{z} - \sin \theta_0 \hat{y}.\tag{25}$$

Agrupando términos para formar el versor $\hat{\psi}_0$, resulta

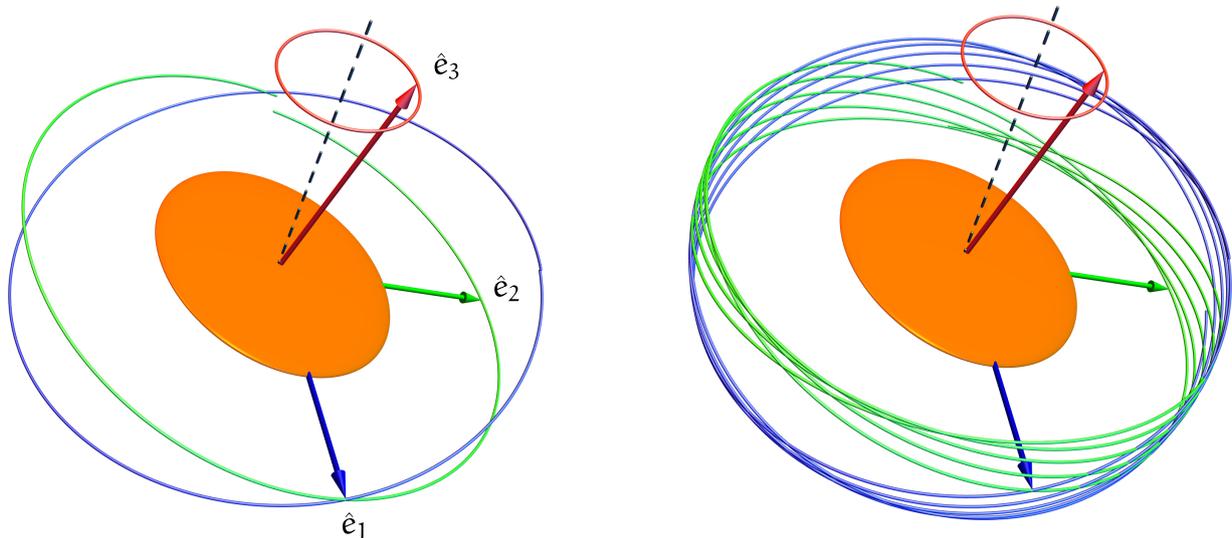
$$\begin{aligned}\hat{e}_3(t) &= \hat{e}_{30} + \delta\theta_0 \hat{x} - \delta\theta_0 \left[\cos \Omega t \hat{x} + \sin \Omega t \hat{\psi}_0 \right] \\ &= \hat{e}_{30} + \delta\theta_0 \hat{e}_{10} - \delta\theta_0 \left[\cos \Omega t \hat{e}_{10} + \sin \Omega t \hat{e}_{20} \right].\end{aligned}\quad (26)$$

La corrección al versor \hat{e}_3 es un vector que rota con frecuencia angular Ω en el plano definido por los versores \hat{e}_{10} y \hat{e}_{20} .

Recordemos que

$$\Omega = \frac{I_3}{I} \omega_3. \quad (27)$$

Teniendo en cuenta que el disco es plano, $I_3 = 2I$, y, por lo tanto, el versor \hat{e}_3 evoluciona con una frecuencia que es igual al doble de la frecuencia con la que evolucionan los versores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 . Eso es lo que se ve aproximadamente en esta [simulación](#). Si siguen la evolución de \hat{e}_3 , verán que da dos revoluciones por cada revolución de los versores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 . Este es un resultado algo desconcertante, porque la terna de versores se mueve rígidamente. ¿Cómo es posible que \hat{e}_3 dé dos vueltas cuando \hat{e}_1 y \hat{e}_2 sólo dan una? En la simulación también es claro que los versores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 no se mueven exactamente sobre un plano. En realidad tampoco realizan un movimiento estrictamente periódico, pero eso queda oculto por la periodicidad forzada de la animación. La siguiente figura muestra las curvas que describen los versores fijos al cuerpo. A la izquierda, durante un solo ciclo; a la derecha, durante cinco ciclos. Eso hace notable la no periodicidad del movimiento de \hat{e}_1 y \hat{e}_2 .



Podrían preguntarse por qué la curva que describe \hat{e}_3 no es abierta, como las otras. De hecho, es un resultado exacto que en la rotación libre de una peonza simétrica \hat{e}_3 siempre describe un círculo. Este movimiento se conoce como la precesión regular de la peonza, y está ligado a la conservación del momento angular y a la simetría del cuerpo.

Disco de Feynman II. La solución anterior tiene la desventaja de que todo parece depender de la elección de condiciones iniciales muy particulares. Esta es una objeción razonable. Las condiciones iniciales fueron elegidas para hacer más fáciles las cuentas. Sin embargo, puede demostrarse que la única condición fundamental es que $|\omega_1|, |\omega_2| \ll |\omega_3|$. Las condiciones iniciales del problema anterior aseguran el cumplimiento de esta condición y son sencillas de manejar. Calcular la relación entre las frecuencias para condiciones iniciales más generales usando el formalismo lagrangiano es un poco tedioso. Es más sencillo trabajar con las ecuaciones de Euler.

Las ecuaciones de Euler describen la evolución de las componentes de la velocidad angular en la base de versores fijos al cuerpo, cuando estos versores coinciden con las direcciones de los ejes principales de inercia. El punto de partida es la ecuación para la variación del momento angular respecto del centro de masa:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}, \quad (28)$$

donde

$$\mathbf{L} = \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3, \quad (29)$$

y $\boldsymbol{\tau}$ es el torque respecto del centro de masa. El momento angular \mathbf{L} es el momento angular intrínseco. La derivada de \mathbf{L} respecto del tiempo va a contener dos clases de términos. Primero, términos de la forma

$$I_i \dot{\omega}_i \hat{e}_i, \quad (30)$$

donde lo que se deriva son las componentes de la velocidad angular. Y, en segundo lugar, términos de la forma

$$I_i \omega_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}, \quad (31)$$

donde lo que se deriva son los versores fijos al cuerpo. Debido justamente a que los versores están fijos al cuerpo, su derivada es

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \hat{e}_i. \quad (32)$$

Escribiendo $\boldsymbol{\omega}$ en la misma base de versores, es fácil ver que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{e}_1}{dt} = \omega_3 \hat{e}_2 - \omega_2 \hat{e}_3, \\ \frac{d\hat{e}_2}{dt} = \omega_1 \hat{e}_3 - \omega_3 \hat{e}_1, \\ \frac{d\hat{e}_3}{dt} = \omega_2 \hat{e}_1 - \omega_1 \hat{e}_2. \end{array} \right. \quad (33)$$

Basta con deducir una sola de estas ecuaciones, las otras se obtienen por permutación cíclica de los índices.

Con estos elementos, uno puede calcular la derivada de L respecto del tiempo. Reuniendo todos los términos asociados a cada dirección, se obtienen tres ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = \tau_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 = \tau_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = \tau_3. \end{cases} \quad (34)$$

De nuevo, basta con escribir una de las ecuaciones, las otras se obtienen por permutación cíclica de los índices.

Con la práctica, uno llega a escribir estas ecuaciones directamente a partir de la expresión de L en la Ec. (29). Uno se pregunta: ¿qué términos en la derivada de L respecto del tiempo están en la dirección de \hat{e}_1 ? El más evidente es

$$I_1 \dot{\omega}_1 \hat{e}_1. \quad (35)$$

El resto de los términos se genera a través del producto vectorial de ω con \hat{e}_2 y \hat{e}_3 . ¿El producto vectorial de cuál componente de ω con \hat{e}_2 está en la dirección de \hat{e}_1 ? La respuesta es la componente 3. Análogamente, será la componente 2 de ω la que a través del producto vectorial con \hat{e}_3 dé un término en la dirección de \hat{e}_1 . La primera contribución será

$$\omega_3 \hat{e}_3 \times I_2 \omega_2 \hat{e}_2 = -I_2 \omega_2 \omega_3 \hat{e}_1, \quad (36)$$

y la segunda,

$$\omega_2 \hat{e}_2 \times I_3 \omega_3 \hat{e}_3 = I_3 \omega_2 \omega_3 \hat{e}_1. \quad (37)$$

En definitiva, la componente 1 de la derivada de L respecto del tiempo será

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3. \quad (38)$$

Con un poco de práctica van a poder escribir esta ecuación directamente a medida que la razonen. Sólo necesitan un mínimo de conocimientos. Las otras ecuaciones se obtienen por permutación cíclica de los índices. Las primeras veces, acaso sea prudente deducir las tres ecuaciones y verificar la propiedad cíclica, para estar seguros de que están haciendo las cosas bien.

Para el disco de Feynman, nos interesa el caso de un cuerpo simétrico, con $I_1 = I_2 \equiv I$, y libre de torques. Sin usar por ahora la propiedad $2I = I_3$, válida si el cuerpo además es

plano, las ecuaciones de Euler se leen como

$$\begin{cases} I\dot{\omega}_1 + (I_3 - I)\omega_2\omega_3 = 0, \\ I\dot{\omega}_2 - (I_3 - I)\omega_3\omega_1 = 0, \\ \dot{\omega}_3 = 0. \end{cases} \quad (39)$$

La última ecuación implica que ω_3 es constante. Esta circunstancia permite integrar las dos otras ecuaciones fácilmente. Una posibilidad es derivar la primera ecuación respecto del tiempo y usar la segunda ecuación para escribir $\dot{\omega}_2$. Así queda

$$\ddot{\omega}_1 + \left(\frac{I_3 - I}{I}\right)^2 \omega_3^2 \omega_1 = 0. \quad (40)$$

Sin pérdida de generalidad, podemos fijar las condiciones iniciales de modo que sea

$$\omega_1(t) = \alpha \cos \lambda t, \quad (41)$$

donde α es una constante y donde

$$\lambda = \left(\frac{I_3 - I}{I}\right) \omega_3. \quad (42)$$

Usando esta expresión para ω_1 y evaluando la primera Ec. (39) obtenemos ω_2 ,

$$\omega_2(t) = \alpha \sin \lambda t. \quad (43)$$

Esto resuelve el problema de encontrar las componentes de la velocidad angular según los versores fijos al cuerpo. Ahora debemos ver cómo evolucionan estos versores.

En principio, tenemos las Ecs. (33)

$$\begin{cases} \frac{d\hat{e}_1}{dt} = \omega_3\hat{e}_2 - \omega_2\hat{e}_3, \\ \frac{d\hat{e}_2}{dt} = \omega_1\hat{e}_3 - \omega_3\hat{e}_1, \\ \frac{d\hat{e}_3}{dt} = \omega_2\hat{e}_1 - \omega_1\hat{e}_2. \end{cases} \quad (44)$$

Aquí vamos a usar la hipótesis de que, en valor absoluto, ω_3 es mucho mayor que las otras dos componentes, que ya hemos visto que son del mismo orden α . Es decir, supondremos que $|\alpha| \ll |\omega_3|$. A más bajo orden, las ecuaciones aproximadas para \hat{e}_1 y \hat{e}_2 son

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_1}{dt} &= \omega_3\hat{e}_2, \\ \frac{d\hat{e}_2}{dt} &= -\omega_3\hat{e}_1. \end{aligned} \quad (45)$$

Estas ecuaciones tienen la misma forma que otro par de ecuaciones que hemos visto con frecuencia:

$$\frac{d\hat{\rho}(\omega t)}{dt} = \omega \hat{\phi}(\omega t), \quad (46)$$

$$\frac{d\hat{\phi}(\omega t)}{dt} = -\omega \hat{\rho}(\omega t),$$

cuya solución es

$$\hat{\rho}(\omega t) = \cos \omega t \hat{\rho}(0) + \sin \omega t \hat{\phi}(0), \quad (47)$$

$$\hat{\phi}(\omega t) = -\sin \omega t \hat{\rho}(0) + \cos \omega t \hat{\phi}(0).$$

De manera análoga, la solución del sistema de ecuaciones (45) será

$$\hat{e}_1(t) = \cos \omega_3 t \hat{e}_{10} + \sin \omega_3 t \hat{e}_{20}, \quad (48)$$

$$\hat{e}_2(t) = -\sin \omega_3 t \hat{e}_{10} + \cos \omega_3 t \hat{e}_{20},$$

donde \hat{e}_{10} y \hat{e}_{20} son los versores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 en $t = 0$. Vemos entonces que, en primera aproximación, estos versores rotan en el plano definido por sus direcciones en $t = 0$.

Si tratamos de calcular \hat{e}_3 usando estas expresiones y el hecho de que $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2$, obtenemos un resultado trivial

$$\hat{e}_3(t) = \hat{e}_3(0). \quad (49)$$

Las Ecs. (48) no son suficientes para revelar la evolución temporal de \hat{e}_3 . Volvamos a la ecuación exacta

$$\frac{d\hat{e}_3}{dt} = \omega_2 \hat{e}_1 - \omega_1 \hat{e}_2. \quad (50)$$

Reemplazando en esta ecuación las expresiones exactas para ω_1 y ω_2 , que quedaron escritas en las Ecs. (41) y (43), y las soluciones de orden cero de las Ecs. (48), resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_3}{dt} &= \alpha \left[(\sin \lambda t \cos \omega_3 t + \cos \lambda t \sin \omega_3 t) \hat{e}_{10} + (\sin \lambda t \sin \omega_3 t - \cos \lambda t \cos \omega_3 t) \hat{e}_{20} \right] \\ &= \alpha \left[\sin(\lambda + \omega_3)t \hat{e}_{10} - \cos(\lambda + \omega_3)t \hat{e}_{20} \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

Notemos que, según la Ec. (42),

$$\lambda + \omega_3 = \frac{I_3}{I} \omega_3 \equiv \Omega. \quad (52)$$

La Ec. (51) se integra inmediatamente,

$$\hat{e}_3(t) = \hat{e}_{30} + \frac{\alpha}{\Omega} \hat{e}_{10} - \frac{\alpha}{\Omega} \left[\cos \Omega t \hat{e}_{10} + \sin \Omega t \hat{e}_{20} \right]. \quad (53)$$

Esto quiere decir que la proyección del versor \hat{e}_3 sobre el plano definido por \hat{e}_{10} y \hat{e}_{20} rota con velocidad angular Ω . La comparación de las Ecs. (48) y (53) con las correspondientes Ecs. (23) y (26) muestra que ambos métodos de solución conducen exactamente a las mismas expresiones para los versores. Si usamos que $I_3 = 2I$, la Ec. (52) implica $\Omega = 2\omega_3$, que es lo que queríamos demostrar en un principio.

Un resultado que mencionamos sin demostración al final de la sección anterior es que, para una peonza simétrica libre de torques, \hat{e}_3 describe un círculo con velocidad de precesión constante. Este es un resultado exacto que no depende de ninguna aproximación. Mediante las ecuaciones de Euler es sencillo demostrarlo. En primer lugar, sabemos que \mathbf{L} es constante y que está dado por

$$\mathbf{L} = I_1\omega_1\hat{e}_1 + I_2\omega_2\hat{e}_2 + I_3\omega_3\hat{e}_3. \quad (54)$$

La proyección de \hat{e}_3 sobre \mathbf{L} es

$$\hat{e}_3 \cdot \mathbf{L} = I_3\omega_3. \quad (55)$$

Pero de acuerdo a las ecuaciones de Euler, para una peonza simétrica ω_3 es constante. Esto implica que \hat{e}_3 forma un ángulo constante con \mathbf{L} y que, por lo tanto, su extremo se mueve sobre un círculo. Para ver que este movimiento tiene velocidad constante, a partir de la Ec. (50) calculemos el módulo al cuadrado de la velocidad de variación de \hat{e}_3 :

$$\left| \frac{d\hat{e}_3}{dt} \right|^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2. \quad (56)$$

Por otro lado,

$$|\mathbf{L}|^2 = I^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3^2\omega_3^2. \quad (57)$$

Esta cantidad es constante, pero también es constante ω_3 . De manera que $\omega_1^2 + \omega_2^2$ es constante. Luego, el módulo de la velocidad de variación de \hat{e}_3 es constante. El movimiento de un vector que describe un círculo y cuya velocidad de variación tiene módulo constante sólo puede ser un movimiento de precesión uniforme.

Podría parecer que la velocidad de precesión está dada por la Ec. (56), pero no es así. El versor \hat{e}_3 se escribe como

$$\begin{aligned} \hat{e}_3(t) &= [\hat{e}_3(t) \cdot \mathbf{L}] \frac{\mathbf{L}}{L^2} + a(\cos \Omega_{\text{pr}}t \hat{x}_1 + \sin \Omega_{\text{pr}}t \hat{x}_2) \\ &= \frac{I_3\omega_3}{L^2} \mathbf{L} + a(\cos \Omega_{\text{pr}}t \hat{x}_1 + \sin \Omega_{\text{pr}}t \hat{x}_2), \end{aligned} \quad (58)$$

donde a es una constante y donde \hat{x}_1 y \hat{x}_2 son un par de versores que forman una base

ortonormal en el plano perpendicular a L . Debido a que \hat{e}_3 es un versor, debe ser

$$|\alpha| = \sqrt{1 - \left(\frac{I_3 \omega_3}{L}\right)^2} = \frac{I}{L} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \quad (59)$$

Luego, a partir de la Ec. (58), el módulo al cuadrado de la velocidad de variación de \hat{e}_3 es

$$\left|\frac{d\hat{e}_3}{dt}\right|^2 = \alpha^2 \Omega_{\text{pr}}^2 = \left(\frac{I}{L}\right)^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \Omega_{\text{pr}}^2. \quad (60)$$

Según vimos antes en la Ec. (56), esto tiene que ser igual a $\omega_1^2 + \omega_2^2$. Entonces

$$|\Omega_{\text{pr}}| = \frac{L}{I}. \quad (61)$$

Este resultado es exacto para una peonza simétrica libre de torques. En el problema del disco de Feynman, $L \simeq I_3 |\omega_3|$, y así

$$|\Omega_{\text{pr}}| \simeq \frac{I_3}{I} |\omega_3| = |\Omega|, \quad (62)$$

tal como habíamos calculado.

■ Respecto a la cita del comienzo. Allí dice Feynman que la velocidad de giro era el doble de la velocidad de bamboleo, que es justo lo opuesto de lo que hemos demostrado. No es un error de la traducción. Lo más probable es que se trate de un error del propio Feynman. Sería raro que al dictar sus memorias se haya puesto a verificar el cálculo de las frecuencias hecho décadas atrás. Feynman recordaba el resultado notable de que la relación era dos a uno.