Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Guía 8: *Ecuación de Hamilton-Jacobi. Variables de ángulo-acción.*

1. Una partícula de masa m se mueve en el eje x bajo la influencia de un potencial $V(x)$.

   a) Escribir la ecuación de H–J dependiente del tiempo y encontrar, por separación de variables, la función S en términos de una expresión integral para la función W. Notar que W no es una función, son dos funciones o, si se quiere, una función bivaluada. Lo mismo puede decirse de S.

   b) A partir de la función S, considerada como una función generatriz de tipo F_2 que conduce al hamiltoniano $K = 0$, encontrar una ecuación implícita para $x(t)$. Mostrar que el mismo resultado se obtiene por los métodos elementales de Física 1.

   c) A partir de la función W, considerada como una función generatriz de tipo F_2 que conduce al hamiltoniano $K = E$, encontrar una ecuación implícita para $x(t)$ y mostrar que es equivalente a la deducida a partir de S.

2. El hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional es

$$H(q, p) = \tfrac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right).$$

   a) Escribir la ecuación de H–J independiente del tiempo y la expresión integral de la función W. En este caso no es difícil calcular W, pero no es necesario.

   b) A partir de la expresión integral de la función W, encontrar la solución general $q(t)$. Como se señaló antes, no es necesario calcular la función W, sólo sus derivadas.

3. Una partícula de masa m se mueve en el plano xy en un campo gravitatorio $\mathbf{g} = -g\hat{y}$. Mediante el método de H–J, encontrar la trayectoria $y(x)$ y las funciones $x(t)$ e $y(t)$.

4. Una partícula de masa m se mueve en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$ bajo la influencia de un potencial central $V(r)$. Separando la ecuación de H–J independiente del tiempo en coordenadas polares, encontrar las ecuaciones implícitas que determinan $r(t)$ y $r(\varphi)$. Mostrar que los mismos resultados se obtienen por los métodos elementales de Física 1.

5. Considerar el hamiltoniano

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{(p_2 - kq_1)^2}{2m}.$$

   Encontrar la solución general de las ecuaciones de movimiento mediante el método de H–J. ¿Qué sistema físico podría corresponder a este problema? A modo de comparación, resolver el problema a partir de las ecuaciones canónicas.

6. Una partícula relativista de masa m y carga e se mueve en el eje x bajo la influencia de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = \lambda\hat{x}$, donde $\lambda e > 0$. Graficar el retrato de fase. Escribir la ecuación de H–J independiente del tiempo y encontrar la solución general para $x(t)$.

7. Una partícula relativista de masa m y carga e se mueve en el plano xy bajo la influencia de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = \lambda\hat{x}$. Escribir la ecuación de H–J independiente del tiempo y encontrar la solución general de la trayectoria $x(y)$ y las funciones $x(t)$ e $y(t)$.

8. Mostrar que en los siguientes casos la ecuación de H–J es separable:

   a) En coordenadas esféricas, una partícula de masa m en un potencial central $V(r)$.

   b) En coordenadas cilíndricas, una partícula de masa m en el potencial de Hooke.

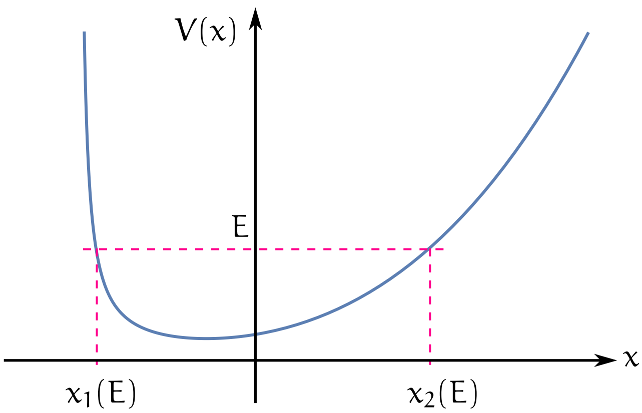
   c) Usando los ángulos de Euler, un giróscopo.

   d) En coordenadas esféricas, una partícula de masa m en un potencial de la forma

$$V(\mathbf{r}) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2\theta}.$$

9. Mostrar que la ecuación de H–J para una partícula relativista de masa m y carga e en un potencial electrostático central $\Phi(r)$ es separable en coordenadas esféricas. Asumiendo que la partícula se mueve en el plano $\theta = \frac{\pi}{2}$, encontrar la ecuación de la trayectoria $r(\varphi)$ en un potencial coulombiano atractivo, $e\Phi(r) = -k/r$, donde $k > 0$.

10. Una partícula de masa m se mueve en el eje x bajo la influencia de un potencial $V(x)$ que tiene el aspecto general mostrado en la figura. Las funciones $x_1(E) \leqslant x_2(E)$ son los puntos de retorno como función de la energía.



Escribir la expresión integral para la variable de acción $J(E)$. Derivando esta expresión respecto de la energía, encontrar el período del movimiento. Mostrar que el mismo resultado se obtiene por los métodos elementales de Física 1.

11. Considerar el hamiltoniano del oscilador armónico, $H(q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$. Encontrar las variables de ángulo-acción en términos de las variables q y p y graficar sus curvas coordenadas en el plano qp. Escribir las relaciones inversas. Encontrar $H(J)$ y verificar que $H'(J)$ es igual a la frecuencia angular del oscilador.

12. (Este problema está en la Guía). Una partícula de masa m se mueve en el eje x en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}a, \frac{\pi}{2}a\right]$ bajo la influencia del potencial $V(x) = \epsilon \sec^2\left(\frac{x}{a}\right)$, donde $\epsilon, a > 0$.

   a) Escribir la expresión integral para W y a partir de esta expresión encontrar $x(t)$.

   b) Calcular las variables de ángulo-acción en función de las variables x y p y graficar sus curvas coordenadas en el plano xp.

   c) Calcular el período del movimiento: i) derivando la expresión explícita de $J(E)$, ii) derivando la expresión integral de $J(E)$ sin calcular $J(E)$.

Nota práctica: Como el período se calcula a partir de $J'(E)$, pudiera parecer que eso requiere el cálculo previo de $J(E)$. Sin embargo, suele ser más fácil calcular $J'(E)$ sin calcular $J(E)$, simplemente derivando su expresión integral. Usualmente, calcular $J(E)$ es difícil, pero calcular su derivada, sin calcular $J(E)$, es fácil. Lo mismo puede decirse de la función W.

13) El hamiltoniano de un oscilador armónico en dos dimensiones es

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \tfrac{1}{2}\Big(p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2\Big).$$

   a) Escribir la ecuación de H–J independiente del tiempo y mostrar que es separable.

   b) Graficar los retratos de fase en los planos q_1p_1 y q_2p_2.

   c) A partir de la función W, encontrar la ecuación de la trayectoria, $f(q_1, q_2) = 0$, y la ecuación que determina la evolución temporal, $g(q_1, q_2, t) = 0$.

   d) A partir de estas dos ecuaciones, encontrar $q_1(t)$ y $q_2(t)$.

   e) Calcular las variables de acción $J_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y $J_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, y escribir el hamiltoniano como función de estas variables, $H = H(J_1, J_2)$.

   f) Calcular las frecuencias angulares de las variables ángulo. Sólo con esa información, ¿qué puede concluirse acerca del movimiento del sistema?

   g) Calcular las variables ángulo $\theta_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y $\theta_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

14) Eligiendo convenientemente las unidades, el lagrangiano de un sistema es

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{4}\left(q_1^2 + q_2^2\right)\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + \frac{2}{q_1^2 + q_2^2}.$$

   a) Escribir la ecuación de H–J independiente del tiempo y mostrar que es separable.

   b) Asumiendo que $E < 0$, graficar los retratos de fase en los planos q_1p_1 y q_2p_2.

   c) Siempre en el caso $E < 0$, a partir de la función W, encontrar la ecuación de la trayectoria, $f(q_1, q_2) = 0$, y la ecuación que determina la evolución temporal, $g(q_1, q_2, t) = 0$.

   d) Calcular las variables de acción $J_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y $J_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, y escribir el hamiltoniano como función de estas variables, $H = H(J_1, J_2)$.

e) Calcular las frecuencias angulares de las variables ángulo. Sólo con esa información, ¿qué puede concluirse acerca del movimiento del sistema?

f) Calcular las variables ángulo $\theta_1(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ y $\theta_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$.

g) Hemos visto en otras guías y con otras coordenadas un sistema físico al que corresponde este lagrangiano. ¿De qué sistema se trata?

15) Una partícula de masa m y carga e se mueve en el plano xy bajo la influencia de un campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{z}$, donde $eB < 0$. Usar el *gauge* simétrico, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{B}$.

a) Mostrar que la ecuación de H–J es separable en coordenadas polares. Graficar el retrato de fase en el plano ρp_ρ.

b) Encontrar $\rho(t)$ y $\rho(\varphi)$ usando el formalismo de H–J. Verificar que los mismos resultados se obtienen por los métodos elementales de Física 1.

c) Encontrar las variables de acción J_ρ y J_φ y escribir el hamiltoniano en esas variables. A partir de esa expresión, deducir las frecuencias del sistema. Sólo con esa información, ¿qué puede concluirse acerca del movimiento de la partícula?