Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Guía 8: *Variables de ángulo-acción. Episodio I.*[*]

1. Arbitrariedad en la elección de los nuevos impulsos 1
   1.1. Un solo grado de libertad 2
   1.2. El caso general 4
2. Las variables de ángulo-acción cuando hay un solo grado de libertad 5
   2.1. Motivación para la variable de acción 8
   2.2. Rotaciones 10
   2.3. Relación entre la variable de acción y el período del movimiento 11
   2.4. Problema 10 13
   2.5. Problema 11 16
   2.6. Problema 12 20

1. Arbitrariedad en la elección de los nuevos impulsos

La evolución de un sistema conservativo puede ser obtenida resolviendo la ecuación de H–J para la función característica de Hamilton,

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right) = E. \tag{1}$$

Reservando α_1 para la energía E, el método requiere que encontremos una solución

$$W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{2}$$

que dependa de la energía y de otros $n-1$ parámetros; digamos, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Lo más directo es definir una función generatriz como

$$F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = W(\mathbf{q}, \mathbf{P}), \tag{3}$$

asignando el lugar ocupado por los parámetros $\boldsymbol{\alpha}$ a los nuevos impulsos $\mathbf{P}$. Por construcción, el nuevo hamiltoniano es

$$H(\boldsymbol{\alpha}) = H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{q}}\right) = \alpha_1 = E. \tag{4}$$

Uno suele decir que los parámetros $\boldsymbol{\alpha}$ son los nuevos impulsos, pero sería más apropiado decir que los lugares que ocupan los parámetros $\boldsymbol{\alpha}$ son ocupados por los nuevos impulsos. La distinción es más conceptual que práctica y, de hecho, uno termina llamando $\boldsymbol{\alpha}$ a los nuevos impulsos. El objetivo ahora es mostrar que la identificación $\mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}$ no es la única posible, sino que uno tiene la libertad de elegir los nuevos impulsos como n funciones independientes de $\boldsymbol{\alpha}$.

---

[*]zanellaj@df.uba.ar

1.1. Un solo grado de libertad

Analicemos primero un sistema con un solo grado de libertad. La ecuación de H–J es

$$H\big(q, W'(q)\big) = E. \tag{5}$$

Alcanza con encontrar una solución, cuya dependencia en E es incorporada explícitamente a la función,

$$W = W(q, E). \tag{6}$$

Vista como una función generatriz de tipo F_2, la función W conduce al hamiltoniano

$$H(E) = H\left(q, \frac{\partial W(q,E)}{\partial q}\right) = E. \tag{7}$$

La dinámica de la nueva coordenada es

$$\dot{Q} = \frac{\partial H(E)}{\partial E} = 1 \quad \Rightarrow \quad Q = t - t_0, \tag{8}$$

y, por otro lado, la ecuación de transformación implica

$$Q(q, E) = \frac{\partial W(q,E)}{\partial E}. \tag{9}$$

De manera que la dinámica de q queda cifrada implícitamente en la siguiente ecuación

$$t - t_0 = \frac{\partial W(q,E)}{\partial E}. \tag{10}$$

Consideremos un cambio de variables

$$\beta = F^{-1}(E), \tag{11}$$

cuya inversa sea

$$E = F(\beta). \tag{12}$$

En un momento quedará claro porque usamos F^{-1} en primer lugar y no F. Llevando a cabo el cambio de variables en la función W, obtenemos una función de β

$$\mathcal{W}(q, \beta) = W\big(q, F(\beta)\big). \tag{13}$$

Esta función cumple todos los requisitos de una función generatriz de tipo F_2, requisitos que, esencialmente, se resumen diciendo que debe depender de q y de algún parámetro no aditivo. Considerada como función generatriz, $\mathcal{W}$ conduce al nuevo hamiltoniano

$$H(\beta) = H\left(q, \frac{\partial \mathcal{W}(q,\beta)}{\partial q}\right) = H\left(q, \frac{\partial W\big(q, F(\beta)\big)}{\partial q}\right) = F(\beta). \tag{14}$$

Este es el motivo de que en el miembro de la derecha de la Ec. (11) hayamos escrito F^{-1} y no simplemente F. Abusando un poco de la notación, definamos las funciones

$$E(\beta) = F(\beta), \qquad \beta(E) = F^{-1}(E). \tag{15}$$

Lo importante es notar que uno tiene libertad para elegir $E(\beta)$. Veremos que esta libertad puede usarse para que las nuevas coordenadas tengan propiedades especialmente útiles.

El nuevo impulso asociado a la función $\mathcal{W}$ es β. Veamos ahora cuál es la nueva coordenada. La función $W(q, E)$ tiene asociadas las nuevas variables Q y E, donde

$$Q(q, E) = \frac{\partial W(q, E)}{\partial E}. \tag{16}$$

Las variables asociadas a la función $\mathcal{W}(q, \beta)$ son $\mathcal{Q}$ y β, donde

$$\mathcal{Q}(q, \beta) = \frac{\partial \mathcal{W}(q, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial W\big(q, E(\beta)\big)}{\partial \beta} = \frac{\partial W}{\partial E}\big(q, E(\beta)\big)\, E'(\beta). \tag{17}$$

Usando la definición de $Q(q, E)$, esto también puede leerse como

$$\mathcal{Q}(q, \beta) = E'(\beta) Q\big(q, E(\beta)\big). \tag{18}$$

En la mayoría de los problemas, resulta más inmediato escribir $\mathcal{Q}$ como función de q y E,

$$\mathcal{Q}(q, E) = E'\big(\beta(E)\big) Q(q, E) = \frac{1}{\beta'(E)}\, Q(q, E). \tag{19}$$

La última igualdad es válida porque E es una función de una sola variable.

La dinámica de la nueva coordenada se obtiene a partir del hamiltoniano $H(\beta) = E(\beta)$,

$$\dot{\mathcal{Q}} = E'(\beta) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}(t) = E'(\beta) t + \mathcal{Q}_0. \tag{20}$$

También podemos escribir esto como función de la energía,

$$\dot{\mathcal{Q}} = \frac{1}{\beta'(E)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{Q}(t) = \frac{1}{\beta'(E)}\, t + \mathcal{Q}_0. \tag{21}$$

La velocidad $\dot{Q}$ es constante e igual a uno para todas las órbitas. La velocidad $\dot{\mathcal{Q}}$ es constante sobre cada órbita, pero depende de la energía. La idea de las variables de ángulo-acción es ajustar la función $\beta(E)$ de modo que, para las órbitas cerradas, independientemente de la energía, la nueva coordenada varíe en 2π cuando el sistema recorre una órbita completa. Esto da cierta uniformidad a las curvas coordenadas de $\mathcal{Q}$ en el plano qp. Volveremos sobre este punto en los problemas 10 y 12.

1.2. El caso general

La generalización del cambio de variables para sistemas con más de un grado de libertad es inmediata. Resolviendo la ecuación de H–J, uno encuentra una función

$$W = W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{22}$$

que depende de las n coordenadas $\mathbf{q}$ y de n parámetros independientes $\boldsymbol{\alpha}$, donde $\alpha_1 = E$. Consideremos un cambio de variables $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$, invertible, de manera que sea $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})$. Definamos la función

$$\mathcal{W}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}) = W\big(\mathbf{q}, \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})\big). \tag{23}$$

Debido a que W satisface la ecuación

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{q}}\right) = \alpha_1 = E, \tag{24}$$

para la función $\mathcal{W}$ tendremos

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \mathbf{q}}\right) = H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W\big(\mathbf{q}, \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})\big)}{\partial \mathbf{q}}\right) = F_1(\boldsymbol{\beta}) = E(\boldsymbol{\beta}). \tag{25}$$

Luego, considerada como una función generatriz de tipo F_2, $\mathcal{W}$ conduce al hamiltoniano

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\beta}) = H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \nu q}\right) = E(\boldsymbol{\beta}). \tag{26}$$

Las nuevas coordenadas son

$$\mathcal{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial W\big(\mathbf{q}, \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})\big)}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\big(\mathbf{q}, \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})\big) \cdot \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}. \tag{27}$$

En términos de las coordenadas $\mathbf{Q}$ asociadas a W, queda

$$\mathcal{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{Q}\big(\mathbf{q}, \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})\big) \cdot \frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}. \tag{28}$$

Resulta más inmediato escribir las nuevas coordenadas en función de $\boldsymbol{\alpha}$,

$$\mathcal{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\big(\mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})\big) = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right]^{-1}. \tag{29}$$

En último término figura la inversa de la matriz $\partial \mathbf{F}/\partial \boldsymbol{\alpha}$. Comparen esto con la Ec. (19).

La dinámica de las nuevas coordenadas será

$$\dot{\mathcal{Q}} = \frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}. \tag{30}$$

Estas velocidades son constantes, pero dependerán, en general, de los n impulsos $\boldsymbol{\beta}$. Todo quedará más claro cuando veamos ejemplos.

2. Las variables de ángulo-acción cuando hay un solo grado de libertad

Hemos visto que a partir de una solución $W(q, E)$ de la ecuación de H–J, podemos construir infinitas funciones generatrices de tipo F_2 introduciendo el cambio de variables invertible $E = E(\beta)$ y definiendo

$$\mathcal{W}(q, \beta) = W\big(q, E(\beta)\big). \tag{31}$$

El nuevo hamiltoniano asociado a cada una de estas funciones $\mathcal{W}$ es

$$H(\beta) = E(\beta). \tag{32}$$

La arbitrariedad en la elección de la función $E(\beta)$, dentro de las funciones invertibles, nos da la libertad de que el nuevo hamiltoniano sea cualquier función que se nos ocurra. Hay elecciones de la función $E(\beta)$ que resultan ventajosas. Ahora veremos una de ellas.

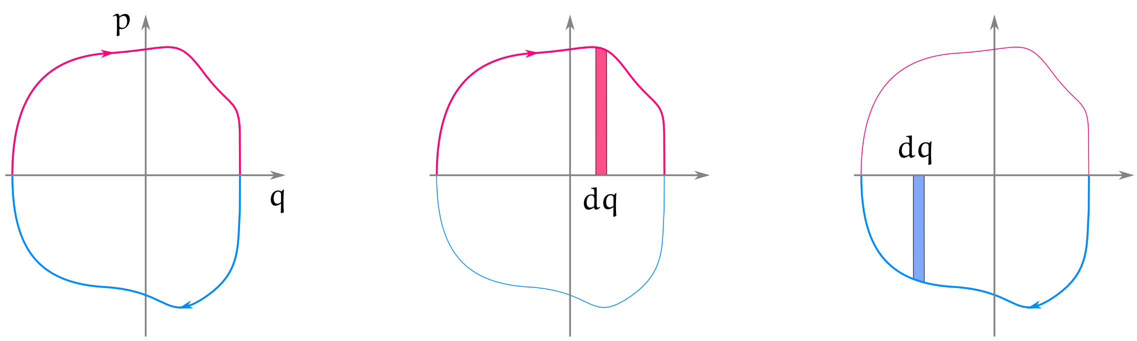
Si las trayectorias en el espacio de fase, o al menos en una región del espacio de fase, son órbitas cerradas, definamos la función

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint_{H(q,p)=E} p\,dq, \tag{33}$$

donde la curva de integración es la órbita cerrada definida por la ecuación $H(q, p) = E$. En general, escribiremos

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint p\,dq. \tag{34}$$

La coordenada J es llamada variable de acción. Es fácil interpretar la definición (33) de manera gráfica. Consideremos una trayectoria como la que muestra la figura de la izquierda.



La integral de línea puede separarse en dos tramos. En el tramo superior, dq y p son positivos y $p\,dq$ es igual al diferencial de área marcado en la figura central. En el tramo inferior, dq es negativo, pero p también es negativo. El producto $p\,dq$ será igual al diferencial de área mostrado en la figura de la derecha. La integral a lo largo del tramo superior da el área encerrada por encima del eje q, mientras que la integral a lo largo del tramo inferior da el área por debajo del eje q. La integral completa da el área total encerrada por la órbita.

Este resultado no depende de la forma particular de la órbita. La manera más sencilla de demostrarlo es usando el teorema de Green. Consideremos una función vectorial en el plano de fase,

$$\mathbf{F}(q,p) = A(q,p)\hat{q} + B(q,p)\hat{p}. \tag{35}$$

Dada una curva cerrada $\mathcal{C}$ en el plano qp, el teorema de Green implica que

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \oint_{\mathcal{C}} (A dq + B dp) = \int_{\Sigma(\mathcal{C})} \left(\frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial p}\right) dq dp, \tag{36}$$

donde $\Sigma(\mathcal{C})$ es la región encerrada por la curva. Si elegimos $A = p$ y $B = 0$, queda

$$\oint_{\mathcal{C}} p dq = -\int_{\Sigma(\mathcal{C})} dq dp = -\text{área}(\mathcal{C}). \tag{37}$$

La diferencia entre la definición (33) y la integral que aparece en la Ec. (37) está en el sentido de circulación. Teniendo eso en cuenta, la Ec. (37) se lee como

$$\oint_{\mathcal{C}} p dq = \text{área}(\mathcal{C}). \tag{38}$$

Debido a que todas las integrales que aparezcan de ahora en más tendrán el sentido de circulación horario, omitiremos el sentido de circulación en el símbolo de la integral.

En conclusión, la variable de acción J es $1/2\pi$ veces el área encerrada por la órbita en el plano qp. Notar que, de manera equivalente, en la Ec. (35) podríamos haber elegido $A = 0$ y $B = q$, y hubiéramos obtenido

$$-\oint_{\mathcal{C}} q dp = \text{área}(\mathcal{C}). \tag{39}$$

Tenemos entonces al menos tres definiciones equivalentes,

$$J(E) = \frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}(E)} p dq = -\frac{1}{2\pi}\oint_{\mathcal{C}(E)} q dp = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma[\mathcal{C}(E)]} dq dp = \frac{1}{2\pi}\text{área}(\mathcal{C}), \tag{40}$$

donde $\mathcal{C}(E)$ es la curva cerrada definida por la ecuación

$$H(q,p) = E. \tag{41}$$

Podemos introducir un nuevo impulso a partir de la función $J(E)$. La función $\mathcal{W}$ será

$$\mathcal{W}(q,J) = W\big(q, E(J)\big), \tag{42}$$

y conducirá al nuevo hamiltoniano

$$H(J) = E(J). \tag{43}$$

La variable J es el nuevo impulso y, como ya se ha dicho, recibe el nombre de variable de acción. Su coordenada conjugada es la variable ángulo y está dada por

$$\theta(q,J) = \frac{\partial \mathcal{W}(q,J)}{\partial J} = \frac{\partial W}{\partial E}\big(q, E(J)\big)\, E'(J) = Q\big(q, E(J)\big)\, E'(J). \tag{44}$$

Escrita como función de la energía, resulta

$$\theta(q,E) = \frac{1}{J'(E)}\frac{\partial W\big(q,E\big)}{\partial E} = \frac{1}{J'(E)} Q(q,E). \tag{45}$$

La propiedad que distingue a la variable ángulo es que, cuando el sistema recorre una órbita completa, θ varía en 2π, independientemente del valor de la energía. La demostración usual e insatisfactoria de esta propiedad puede consultarse en el libro de Goldstein: en la 2da. edición, busquen en las inmediaciones de la Ec. 10–73; en la tercera, diríjanse a la Ec. 10–90. Se empieza por escribir la variación de θ como

$$d\theta = d\left[\frac{\partial \mathcal{W}(q,J)}{\partial J}\right]. \tag{46}$$

Sobre cada órbita, la energía y, por lo tanto, J son constantes. De modo que si se recorre una órbita, la variación anterior se reduce a

$$d\theta = \frac{\partial^2 \mathcal{W}(q,J)}{\partial q \partial J} dq. \tag{47}$$

Integrando a lo largo de la órbita, tendremos

$$\Delta\theta = \oint \frac{\partial^2 \mathcal{W}(q,J)}{\partial q \partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J}\oint \frac{\partial \mathcal{W}(q,J)}{\partial q} dq. \tag{48}$$

El paso decisivo en la ecuación anterior es el intercambio de la integración en q y de la derivación con respecto a J. Ahora bien, la derivada de $\mathcal{W}$ respecto de q es el impulso p,

$$\Delta\theta = \frac{\partial}{\partial J}\oint p(q,J)\, dq = \frac{\partial}{\partial J}\big(2\pi J\big) = 2\pi. \tag{49}$$

Esta propiedad da cierta uniformidad a las curvas coordenadas de θ en el plano qp, comparadas con las curvas de Q. Volveremos sobre eso en los problemas 10 y 12.

La demostración anterior es cuestionable al menos por dos razones. La primera es que no es cierto que, para una órbita cerrada, exista la función $p(q,J)$. Para cada valor de q y J hay al menos dos valores de p. La función $p(q,J)$ es, en todo caso, multivaluada. La segunda objeción tiene que ver con el intercambio de la derivación respecto de J con la integración respecto de q. Se afirma que

$$\oint \frac{\partial^2 \mathcal{W}(q,J)}{\partial q \partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J}\oint \frac{\partial \mathcal{W}(q,J)}{\partial q} dq, \tag{50}$$

pero la definición de la curva sobre la que se realiza la integral depende de J. Para mostrarlo más gráficamente, uno está diciendo que

$$\oint_{\mathcal{C}(J)} \frac{\partial F(q,J)}{\partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint_{\mathcal{C}(J)} F(q,J) dq. \tag{51}$$

Entonces queda claro el sentido de la objeción.

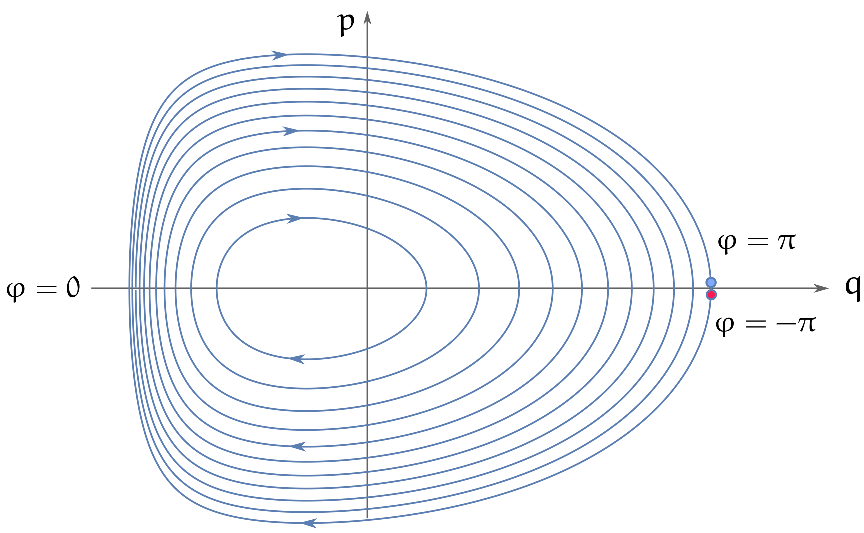
2.1. Motivación para la variable de acción

En la sección anterior, introdujimos la variable de acción sin dar *a priori* ningún motivo. Definida J, nos encargamos, entonces, de demostrar varias consecuencias de esta definición. Es posible llegar a la variable de acción de manera deductiva. La deducción tiene los mismos puntos débiles de la demostración anterior, pero si uno la lee de corrido resulta convincente.

La variable Q asociada a $W(q, E)$ tiene la incómoda propiedad de que su variación al recorrer una órbita completa es una función de la energía. Debido a que $\dot{Q} = 1$, cuando el sistema recorre una órbita, la variación de Q está dada por

$$\Delta Q = T(E). \tag{52}$$

Supongan, por simplicidad, que las órbitas son curvas simples cerradas que rodean al origen, como muestra la figura.



Si parametrizamos las órbitas usando el ángulo φ medido desde el semieje q negativo, recorriéndolas en el sentido de circulación, cada órbita empezaría sobre el semieje q positivo en $\varphi = -\pi$ y terminaría en el mismo punto pero en $\varphi = \pi$. La idea es introducir un cambio de variables $E = E(\beta)$ en la función W, de modo que la nueva coordenada comparta con las coordenadas polares la propiedad de variar en 2π al recorrer una órbita completa, independientemente de la órbita.

Al hacer el cambio de variables $E = E(\beta)$, la nueva coordenada satisface la ecuación

$$\dot{\mathcal{Q}} = E'(\beta) = \frac{1}{\beta'(E)}. \tag{53}$$

Su variación al recorrer una órbita completa será

$$\Delta\mathcal{Q} = \int_0^{T(E)} \frac{dt}{\beta'(E)}. \tag{54}$$

Usando la ecuación de movimiento para la variable q,

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} = E'(\beta)\frac{\partial \beta}{\partial p} = \frac{1}{\beta'(E)}\frac{\partial \beta}{\partial p}, \tag{55}$$

escribamos

$$dt = \frac{dq}{\dot{q}} = \frac{\beta'(E)}{\partial\beta/\partial p}\,dq. \tag{56}$$

Entonces,

$$\Delta\mathcal{Q} = \oint \frac{dq}{\partial\beta/\partial p}. \tag{57}$$

Como el sistema tiene un solo grado de libertad, β es una función únicamente de dos variables, q y p, de modo que (ejercicio)

$$\frac{1}{\partial\beta/\partial p} = \frac{\partial p}{\partial \beta}. \tag{58}$$

Así, finalmente,

$$\Delta\mathcal{Q} = \oint \frac{\partial p}{\partial \beta}dq = \frac{\partial}{\partial\beta}\oint p\,dq. \tag{59}$$

Si lo que queremos es que esta variación sea igual a 2π, independientemente de la órbita, debe ser

$$\oint p\,dq = 2\pi\beta. \tag{60}$$

Es decir, deberemos definir el nuevo impulso como

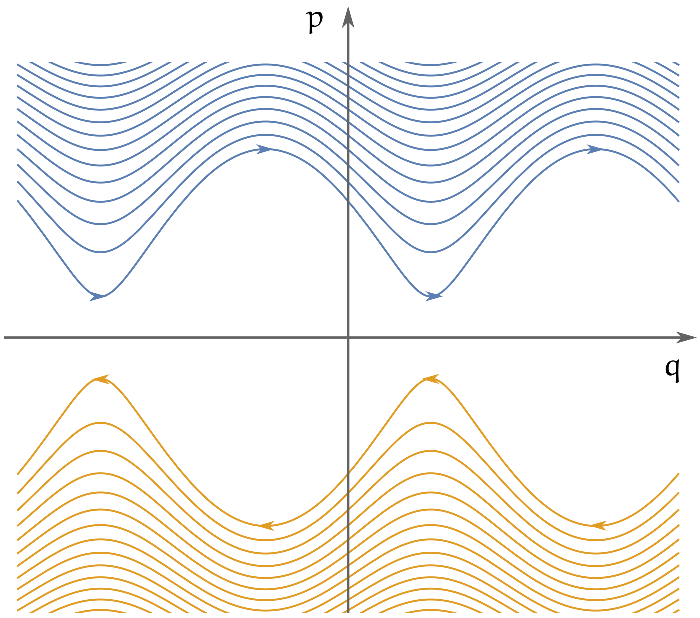
$$\beta(E) = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq, \tag{61}$$

que es, justamente, la variable de acción.

Más adelante volveremos a hablar acerca de la diferencia cualitativa entre las variables Q y θ en relación a sus curvas coordinadas. En algún sentido, las variables J y θ son lo más cercano que podemos tener a las coordenadas polares en el plano qp.

2.2. Rotaciones

Hemos definido la variable de acción para sistemas de un solo grado de libertad que siguen movimientos de libración, es decir, órbitas cerradas en el plano de fase, o al menos en una región del espacio de fase. Es posible extender la definición de la variable de acción para sistemas cuyas trayectorias $p(q, E)$ en el plano de fase sean periódicas como funciones de q. El ejemplo más usual es el del péndulo. Para energías mayores que cierto valor crítico, el péndulo realiza un movimiento de rotación. En esa región del plano de fase, las órbitas son como las que muestra la figura.



Aquí, la periodicidad de las órbitas es consecuencia directa de la periodicidad del potencial. La coordenada q es el ángulo φ, y el período de las funciones $p(q, E)$ es 2π, independientemente de la energía.

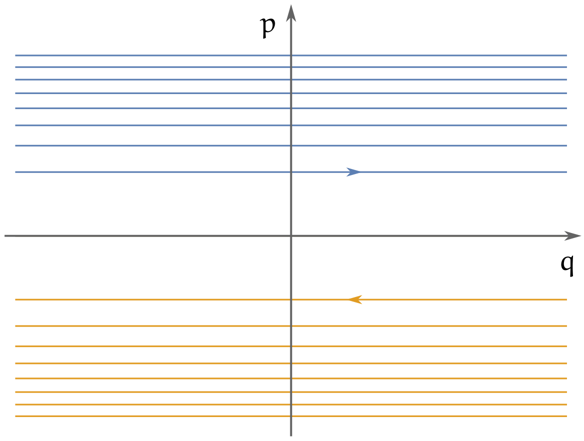
Para este tipo de movimientos, se define

$$J(E) = \int_{\mathcal{C}(E)} p(q, E) dq, \tag{62}$$

donde la integral se extiende a un período de la función $p(q, E)$. Aparece aquí una dificultad. En general, para cada valor de E la función $p(q, E)$ es multivaluada. De manera que uno tiene que dividir el problema de acuerdo a las ramas de la función $p(q, E)$. En la práctica, eso no genera demasiadas complicaciones.

La demostración de que la variación de la variable ángulo durante un período del movimiento es igual a 2π es exactamente igual que antes. Lo que deja de ser cierto es que $J(E)$ sea un área. Por definición, el área es una cantidad mayor o igual que cero, pero, para un movimiento de rotación, $J(E)$ puede tener cualquier signo.

Un caso especial de movimiento de rotación ocurre cuando $p(q, E) = p(E)$. Las trayectorias en el plano de fase son rectas horizontales, como muestra la figura.



El período de la función $p(E)$ puede elegirse arbitrariamente. Si q es un ángulo, la elección convencional es integrar en un intervalo de longitud 2π. El caso paradigmático es un rotor, descripto por el hamiltoniano

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2I}. \tag{63}$$

El retrato de fase está compuesto por líneas rectas paralelas al eje φ, como las de la figura anterior. Para cada valor de E, hay dos valores de p_φ,

$$p_\varphi(E) = \pm\sqrt{2IE}. \tag{64}$$

Esto define, en principio, dos funciones J,

$$J^\pm(E) = \pm\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\,\sqrt{2IE} = \pm\sqrt{2IE} = p_\varphi. \tag{65}$$

Así escritas, es innecesario distinguir entre las dos funciones $J^\pm$. Simplemente es

$$J = p_\varphi. \tag{66}$$

En ninguno de los problemas de la actual Guía 8 aparece el caso de la rotación. En la teórica, seguramente lo encontraron cuando vieron el problema de Kepler en las variables de ángulo-acción.

2.3. Relación entre la variable de acción y el período del movimiento

Veremos ahora una de las propiedades que caracterizan a la variable de acción. Como el nuevo hamiltoniano es

$$H(J) = E(J), \tag{67}$$

y la variable J es constante, la dinámica de la variable ángulo es muy simple,

$$\dot\theta = \frac{\partial H(J)}{\partial J} = E'(J) \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + E'(J)t. \tag{68}$$

Recordemos que el sistema recorre una órbita cerrada en el plano qp. Su movimiento no puede ser otra cosa que periódico. Puesto que la órbita está determinada por el valor de la variable de acción J, el período será una función de J,

$$T = T(J). \tag{69}$$

Por lo tanto, según la Ec. (68), la variación de θ cuando el sistema complete un ciclo será

$$\Delta\theta = E'(J)T(J). \tag{70}$$

Pero, de acuerdo a la Ec. (49), la variación de θ durante un ciclo es 2π. De modo que

$$E'(J)T(J) = 2\pi. \tag{71}$$

Luego,

$$T(J) = \frac{2\pi}{E'(J)}. \tag{72}$$

Equivalentemente,

$$T(E) = 2\pi J'(E). \tag{73}$$

Esto es lo mismo que decir que la frecuencia angular del sistema es

$$\omega(E) = \frac{2\pi}{T(E)} = \frac{1}{J'(E)}, \tag{74}$$

o bien

$$\omega(J) = E'(J) = H'(J). \tag{75}$$

Hemos demostrado estos resultados para sistemas con un solo grado de libertad. Según veremos con los siguientes dos ejemplos, estos resultados son triviales y mayormente inútiles. La potencia del método aparece en sistemas con más de un grado de libertad, donde el movimiento no es necesariamente periódico y muchas de estas cosas deben reinterpretarse.

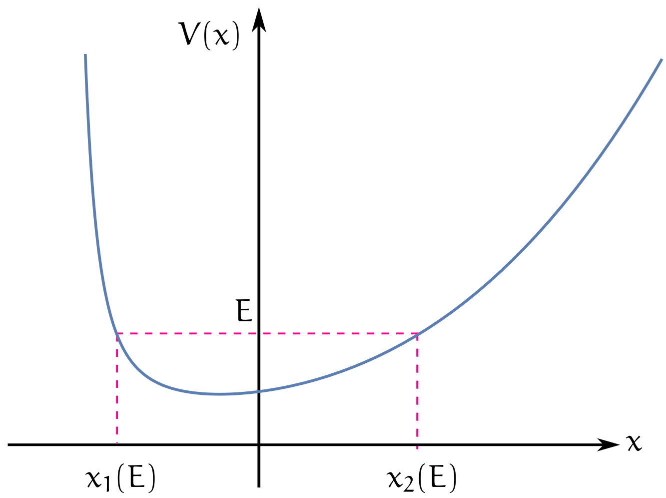
Se insiste en algunos libros acerca la superioridad de las variables de ángulo–acción en el cálculo del período de movimiento. Por ejemplo, en la sección que Goldstein le dedica a las variables de ángulo–acción para un sistema unidimensional, se dice que

> la utilización de las variables de acción-ángulo nos proporciona una técnica potente para la obtención de la frecuencia de un movimiento periódico *sin hallar una solución completa del movimiento del sistema*

El énfasis en la palabra potente es mío. Las itálicas son de Goldstein. En sistemas unidimensionales, la potencia del método de las variables ángulo–acción para calcular el período de movimiento no es superior a lo que cualquier alumno de Física 1 podría manejar.

2.4. Problema 10

Una partícula de masa m se mueve en el eje x bajo la influencia de un potencial $V(x)$ que tiene el aspecto general mostrado en la figura. Las funciones $x_1(E) \leqslant x_2(E)$ son los puntos de retorno como función de la energía.



Escribir la expresión integral para la variable de acción $J(E)$. Derivando esta expresión respecto de la energía, encontrar el período del movimiento. Mostrar que el mismo resultado se obtiene por los métodos elementales de Física 1.

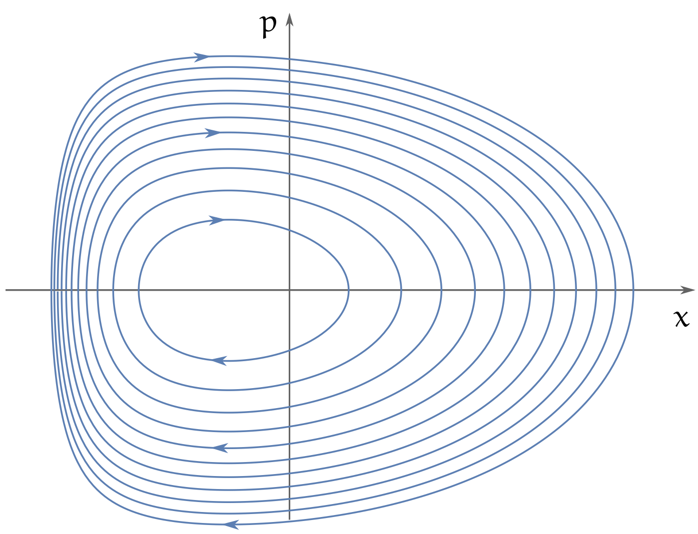
■ **Solución**. El hamiltoniano es

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{76}$$

Las órbitas en el plano de fase xp están definidas por la ecuación

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E, \tag{77}$$

y tienen el aspecto que muestra la figura.



Cada órbita tiene dos puntos de retorno, $x_1(E)$ y $x_2(E)$, tales que

$$E - V\big(x_i(E)\big) = 0. \tag{78}$$

El área encerrada por la órbita de energía E será

$$\mathcal{A}(E) = \oint p\,dx = 2\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx\,\sqrt{E - V(x)}. \tag{79}$$

El factor 2 viene porque la órbita es simétrica respecto al eje x. Luego,

$$J(E) = \frac{\mathcal{A}(E)}{2\pi} = \frac{\sqrt{2m}}{\pi}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx\,\sqrt{E - V(x)}. \tag{80}$$

Por lo pronto, lo que queremos calcular es el período del movimiento y no la función $J(E)$. Según vimos en la Ec. (73),

$$T(E) = 2\pi J'(E). \tag{81}$$

Para calcular $J'(E)$ no necesitamos calcular explícitamente $J(E)$, nos basta con su expresión integral. Al igual que lo que ocurre con la función W, integrar y luego derivar es mucho más complicado que derivar y luego integrar. Derivando la expresión (80), teniendo en cuenta que los puntos de retorno son ceros del integrando, queda

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{82}$$

No se necesita haber cursado Mecánica Clásica hasta la última clase para obtener este resultado. Un alumno de Física 1 hubiera escrito la ecuación de conservación de la energía

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E, \tag{83}$$

y habría despejado

$$dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{84}$$

A partir de aquí, hubiera escrito la siguiente expresión para el período

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{85}$$

Esta es la misma expresión a la que llegamos a través de las variables de ángulo–acción. Si un alumno de Física 1 puede llegar al mismo resultado en tres renglones, ¿dónde está la potencia del método? Se podría presumir que no está en la expresión (82), sino en el hecho de que tal vez sea más sencillo calcular $J(E)$ y tomar su derivada, que haber tomado su derivada antes de calcular $J(E)$. La respuesta, como ya señalamos más arriba, es que esto no es así. Lo usual es que la integral que define $J(E)$, atacada por métodos directos, sea increíblemente más difícil de calcular que la integral que aparece en la Ec. (82), aunque al final $J(E)$ tenga una expresión sencilla. La verdadera potencia de las variables de ángulo–acción está en el análisis del movimiento de sistemas con más de un grado de libertad o en la formulación de métodos perturbativos.

La variable θ tiene la propiedad de que, al recorrer una órbita completa, su variación es 2π, independientemente de la órbita. En más de una ocasión, mencionamos que esta propiedad tiene como consecuencia que las curvas coordenadas de la variable ángulo son mejor comportadas que las curvas coordenadas de la variable Q. Es fácil ver el origen de esta diferencia. Debido a que convencionalmente definimos las funciones $W^{\pm}$ como

$$W^{\pm}(x, E) = \pm\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x} dx\,\sqrt{E - V(x)}, \tag{86}$$

las coordenadas $Q^{\pm}$ asociadas a cada tramo de la órbita son

$$Q^{\pm}(x, E) = \frac{\partial W^{\pm}(x, E)}{\partial E} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1(E)}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{87}$$

Esto implica que, cualquiera sea la energía, sobre el semieje x negativo será

$$Q^{\pm}(x, p) = 0, \qquad \{x \leqslant 0,\ p = 0\}. \tag{88}$$

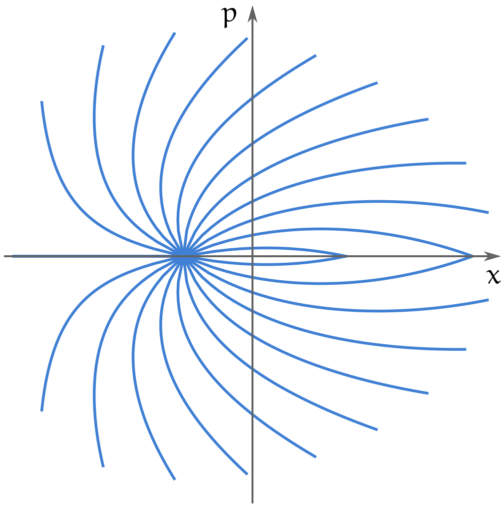
Entonces el rayo $\{x \leqslant 0,\ p = 0\}$ corresponde a la curva coordenada cero de las variables $Q^{\pm}$. Consideremos una partícula que parte del punto de retorno $x_1(E)$. Inicialmente se moverá sobre el tramo superior de la órbita. Debido a la dinámica trivial de las coordenadas $Q^{\pm}$, el valor de Q^{+} como función del tiempo para esta partícula será simplemente

$$Q^{+}(t) = t. \tag{89}$$

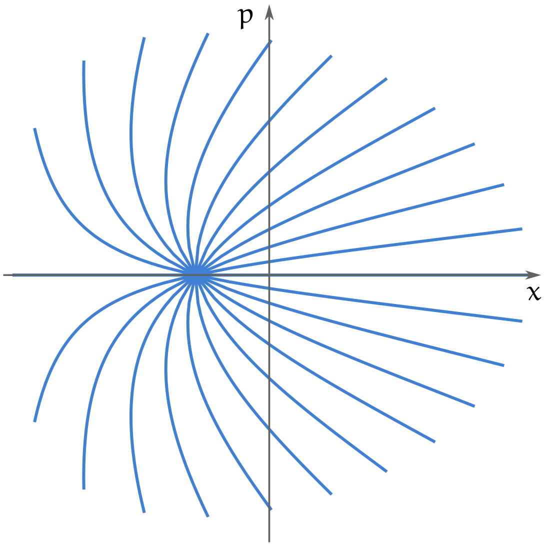
Cuando la partícula llegue al punto de retorno $x_2(E)$, habrá recorrido media órbita. Eso significa que en el punto $\{x_2(E), 0^{+}\}$ del plano de fase la coordenada Q^{+} tomará el valor $\frac{1}{2}T(E)$. Diferentes órbitas tienen diferentes períodos, de modo que sobre el semieje $x > 0$, $p = 0^{+}$ del plano de fase la variable Q^{+} valdrá

$$Q^{+}(x, p) = \tfrac{1}{2}T\big(V(x)\big), \qquad \{x > 0,\ p = 0^{+}\}. \tag{90}$$

Por lo tanto, el semieje $\{x > 0,\ p = 0^{+}\}$ no es una curva coordenada de Q^{+}, sino que corta a todas las curvas coordenadas. Dicho con otras palabras, las curvas coordenadas de la variable Q^{+} cortan al semieje x positivo formando un ángulo distinto de cero. Lo que pasa para la variable Q^{-} es simétrico. El resultado es que, por ejemplo, para el potencial del problema 10, las curvas coordenadas de $Q^{\pm}$ son como las que muestra la figura.



En cambio, sobre el semieje x negativo la variable ángulo θ^+ toma el valor cero, y sobre el semieje $\{x > 0,\ p = 0^+\}$ toma el valor π, independientemente de la órbita, porque ese semieje divide simétricamente la órbita. Iguales argumentos muestran que sobre el semieje $\{x > 0,\ p = 0^-\}$, la variable ángulo θ^- toma el valor $-\pi$. Para el mismo potencial, las curvas coordenadas de las variables $\theta^\pm$ son mucho más regulares, como muestra la figura.



2.5. Problema 11

Considerar el hamiltoniano del oscilador armónico,

$$H(q,p) = \tfrac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right). \tag{91}$$

Encontrar las variables de ángulo-acción en términos de las variables q y p y graficar sus curvas coordenadas en el plano qp. Escribir las relaciones inversas. Encontrar $H(J)$ y verificar que $H'(J)$ es igual a la frecuencia angular del oscilador.

■ **Solución**. Gran parte de lo que tenemos que hacer en este problema ha quedado resuelto en el problema 2. En ese problema encontramos la función generatriz o, mejor dicho, las dos funciones generatrices

$$W^{\pm}(q,E) = \int_{q^-(E)}^{q} dx\, \sqrt{2E - \omega^2 q^2}, \tag{92}$$

donde $q^-(E)$ es el punto de retorno de la izquierda,

$$\frac{\omega q^{\pm}(E)}{\sqrt{2E}} = \pm 1. \tag{93}$$

Ahora necesitamos calcular la variable de acción. Las órbitas en el espacio de fase son elipses definidas por la ecuación

$$p^2 + \omega^2 q^2 = 2E. \tag{94}$$

En este caso, para calcular $J(E)$ no es necesario resolver la integral de la Ec. (34). El área se calcula usando la fórmula del área para un elipse. Si la elipse está definida por

$$ax^2 + by^2 = c, \tag{95}$$

su área es

$$\mathcal{A} = \frac{\pi c}{\sqrt{ab}}. \tag{96}$$

Así,

$$J(E) = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi E}{\sqrt{\omega^2}} = \frac{E}{\omega}. \tag{97}$$

En términos de las coordenadas originales es

$$J(q,p) = \frac{1}{2\omega}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right). \tag{98}$$

A modo de comparación, calculemos J a partir de la integral de línea de la Ec. (34),

$$J(E) = \frac{1}{2\pi}\oint p\,dq = \frac{1}{2\pi}\int_{q^-(E)}^{q^+(E)} p^+(q,E)dq + \frac{1}{2\pi}\int_{q^+(E)}^{q^-(E)} p^-(q,E)dq, \tag{99}$$

donde

$$p^{\pm}(q,E) = \pm\sqrt{2E - \omega^2 q^2}. \tag{100}$$

La integral se divide en dos tramos. Al ir de q^- a q^+, el impulso es positivo; al volver de q^+ a q^-, es negativo. Las dos integrales dan la misma contribución,

$$J(E) = \frac{1}{\pi}\int_{q^-(E)}^{q^+(E)} dq\, \sqrt{2E - \omega^2 q^2} = \frac{\sqrt{2E}}{\pi}\int_{q^-(E)}^{q^+(E)} dq\, \sqrt{1 - \frac{\omega^2 q^2}{2E}}. \tag{101}$$

Aquí hay que usar la primitiva de la función $\sqrt{1-x^2}$,

$$\int dx\, \sqrt{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right). \tag{102}$$

Luego,

$$J(E) = \frac{E}{\pi\omega}\left[\arcsin\left(\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\right) + \frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 q^2}{2E}}\,\right]\Bigg|_{q^-(E)}^{q^+(E)}. \tag{103}$$

Puesto que los puntos de retorno satisfacen la Ec. (93), las cosas son ahora fáciles de evaluar,

$$J(E) = \frac{E}{\pi\omega}\big[\arcsin 1 - \arcsin(-1)\big] = \frac{E}{\omega}. \tag{104}$$

Veremos a continuación cómo obtener las variables ángulo. Cada función $W^{\pm}$ tendrá asociada una variable ángulo. De acuerdo a la Ec. (45),

$$\theta^{\pm}(q, E) = \frac{1}{J'(E)}\frac{\partial W^{\pm}(q, E)}{\partial E} = \omega Q^{\pm}(q, E), \tag{105}$$

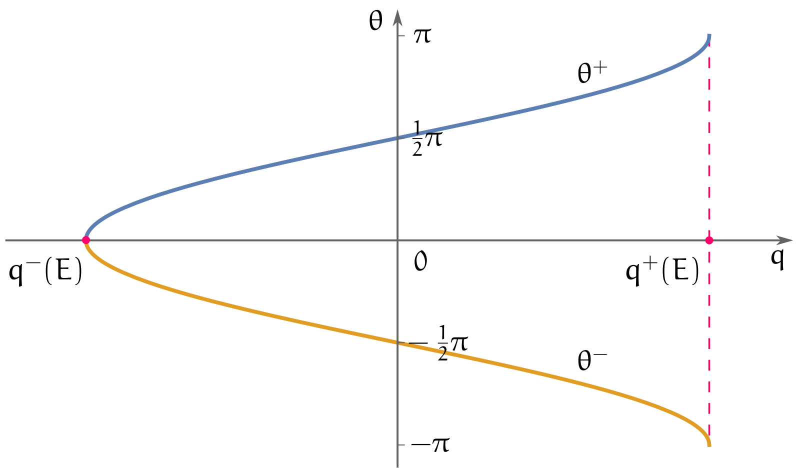
donde las funciones $Q^{\pm}$, como calculamos en el problema 2, son

$$Q^{\pm}(q, E) = \pm\int_{q^-(E)}^{q}\frac{dx}{\sqrt{2E - \omega^2 x^2}} = \pm\frac{1}{\omega}\arccos\left(-\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\right). \tag{106}$$

En definitiva,

$$\theta^{\pm}(q, E) = \pm\arccos\left(-\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\right). \tag{107}$$

En este problema tan simple, la constante de proporcionalidad entre $\theta^{\pm}$ y $Q^{\pm}$ es independiente de la energía. El gráfico de la función $\theta(q, E)$, entendida como una función bivaluada, es como muestra la figura.



Si recorremos la órbita partiendo desde el punto de retorno q^+ siguiendo la rama del movimiento en donde $p \leqslant 0$, la variable ángulo toma inicialmente el valor

$$\theta^-\big(q^+(E), E\big) = -\arccos(-1) = -\pi. \tag{108}$$

Cuando q llega hasta al punto de retorno q^-, la variable ángulo θ^- toma el valor cero, igual al valor que toma θ^+. Ahí pasamos de una rama a la otra de la función θ. Ahora seguimos la rama θ^+, que varía entre cero y

$$\theta^+\big(q^+(E), E\big) = \arccos(-1) = \pi. \tag{109}$$

La variación neta de la función θ ha sido igual a 2π.

La función θ es bivaluada cuando se la considera una función de q y de E, dado que, para una energía fija, para cada valor de q corresponden dos puntos de la órbita. Especificar q y E no determina completamente un punto en el espacio de fase. En cambio si especificamos q y p, el punto queda completamente determinado. Eso hace posible definir una variable ángulo que es una función univaluada de q y p

$$\theta(q,p) = \operatorname{signo}(p) \arccos\left(-\frac{\omega q}{\sqrt{p^2+\omega^2 q^2}}\right). \tag{110}$$

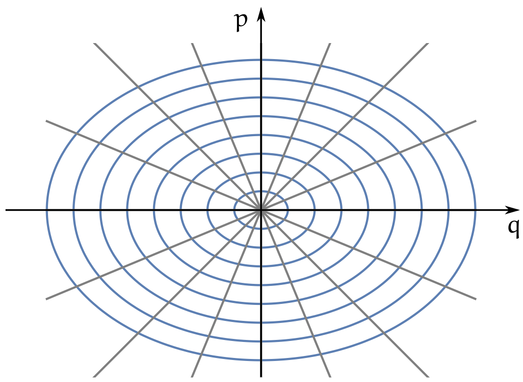
Para mostrar el cambio de variables por extenso, escribamos la variable de acción J, dada en la Ec. (104), también como función de q y p,

$$J(q,p) = \frac{1}{2\omega}\left(p^2+\omega^2 q^2\right). \tag{111}$$

Las relaciones inversas son

$$\begin{aligned} q(\theta, J) &= -\sqrt{\frac{2J}{\omega}}\,\cos\theta, \\ p(\theta, J) &= \sqrt{2\omega J}\,\sin\theta. \end{aligned} \tag{112}$$

Las curvas coordenadas en el plano qp de las variables θ y J son rayos y elipses.



El hamiltoniano en las variables de ángulo-acción se obtiene invirtiendo la relación (97),

$$H(J) = E(J) = \omega J. \tag{113}$$

Antes habíamos deducido, en la Ec. (75), que

$$\omega(J) = H'(J). \tag{114}$$

Evidentemente esta relación se cumple para el oscilador.

¿Vale la pena calcular la variable de acción para obtener la frecuencia del movimiento? Lo que quiero decir es si vale la pena calcular la integral

$$J(E) = \frac{1}{\pi}\int_{q^-(E)}^{q^+(E)} dx\, \sqrt{2E - \omega^2 q^2}, \tag{115}$$

para después calcular $J'(E)$. La respuesta es no. Para calcular la variable de acción tenemos que resolver una integral que es más complicada que la que resulta de derivar primero la expresión integral de $J(E)$. Comparen el cálculo hecho entre las Ecs. (101) y (104) con el cálculo de la integral

$$J'(E) = \frac{1}{\pi}\int_{q^-(E)}^{q^+(E)} \frac{dx}{\sqrt{2E - \omega^2 q^2}} = \frac{1}{\omega\pi}\Big[\arcsin 1 - \arcsin(-1)\Big] = \frac{1}{\omega}. \tag{116}$$

En este ejemplo la diferencia entre calcular la integral que da $J(E)$ o la integral que da $J'(E)$ es, dentro de todo, modesta. Basta complicar un poco el potencial para que la diferencia sea desmesurada.

Una última verificación. Queda como ejercicio que calculen el corchete de Poisson de la variable θ, definida en la Ec. (110), con la variable J, dada por la Ec. (111),

$$\Big[\theta(q,p), J(q,p)\Big] = \left[\text{signo}(p)\arccos\left(-\frac{\omega q}{\sqrt{p^2+\omega^2 q^2}}\right), \frac{1}{2\omega}\big(p^2+\omega^2 q^2\big)\right]. \tag{117}$$

Deberían demostrar que

$$\Big[\theta(q,p), J(q,p)\Big] = 1. \tag{118}$$

2.6. Problema 12

Una partícula de masa m se mueve en el eje x en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}a, \frac{\pi}{2}a\right]$ bajo la influencia del potencial $V(x) = \epsilon \sec^2\left(\frac{x}{a}\right)$, donde $\epsilon, a > 0$.

a) Escribir la expresión integral para W y a partir de esta expresión encontrar $x(t)$.

b) Calcular las variables de ángulo-acción en función de las variables x y p y graficar sus curvas coordenadas en el plano xp.

c) Calcular el período del movimiento: i) derivando la expresión explícita de $J(E)$, ii) derivando la expresión integral de $J(E)$ sin calcular $J(E)$.

■ **Solución**. Las expresiones integrales para las dos ramas de la función W son

$$W^{\pm}(x,E) = \pm\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x} dx\, \sqrt{E - \epsilon\sec^2\left(\frac{x}{a}\right)}. \tag{119}$$

Las nuevas coordenadas $Q^{\pm}$ están dadas por

$$Q^{\pm}(x, E) = \frac{\partial W^{\pm}(x, E)}{\partial E} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - \epsilon \sec^2\left(\frac{x}{a}\right)}}. \tag{120}$$

Tenemos que resolver una integral de la forma

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - b\sec^2 x}} = \int dx\, \frac{\cos x}{\sqrt{a\cos^2 x - b}} = \int dx\, \frac{\cos x}{\sqrt{a - b - a\sin^2 x}}. \tag{121}$$

El cambio de variables $u = \sin x$, conduce a la integral

$$\int \frac{du}{\sqrt{a - b - au^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{a-b}}\; u\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{a-b}}\; \sin x\right). \tag{122}$$

Usando este resultado en la Ec. (120), queda

$$Q^{\pm}(x, E) = \pm\, a\sqrt{\frac{m}{2E}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{E}{E-\epsilon}}\; \sin\frac{x}{a}\right)\Bigg|_{x_1(E)}^{x}. \tag{123}$$

Pero $x_1(E)$ satisface la ecuación

$$\cos\left[\frac{x_1(E)}{a}\right] = \sqrt{\frac{\epsilon}{E}}, \tag{124}$$

junto con la condición $x_1(E) < 0$. Luego,

$$\sin\left[\frac{x_1(E)}{a}\right] = -\sqrt{1 - \cos^2\left[\frac{x_1(E)}{a}\right]} = -\sqrt{\frac{E-\epsilon}{E}}. \tag{125}$$

Entonces,

$$Q^{\pm}(x, E) = \pm\sqrt{\frac{ma^2}{2E}} \left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{E}{E-\epsilon}}\; \sin\frac{x}{a}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \pm\sqrt{\frac{ma^2}{2E}} \arccos\left(-\sqrt{\frac{E}{E-\epsilon}}\; \sin\frac{x}{a}\right). \tag{126}$$

Invirtiendo,

$$x^{\pm} = -a \arcsin\left[\sqrt{\frac{E-\epsilon}{\epsilon}} \cos\left(\sqrt{\frac{2E}{ma^2}}\; Q^{\pm}\right)\right]. \tag{127}$$

Ahora bien, la dinámica de las coordenadas $Q^{\pm}$ es trivial,

$$Q^{\pm}(t) = t - t_0^{\pm}. \tag{128}$$

Finalmente,

$$x^{\pm}(t) = -a \arcsin\left\{\sqrt{\frac{E-\epsilon}{\epsilon}} \cos\left[\sqrt{\frac{2E}{ma^2}}\; (t - t_0^{\pm})\right]\right\}. \tag{129}$$

Para que al pasar de una rama a la otra, la función $x(t)$ sea continua y derivable, debe ser

$$\sqrt{\frac{2E}{ma^2}}\,(t_0^+ - t_0^-) = 2\pi k, \tag{130}$$

para algún entero k. Todas las elecciones son equivalentes. Elijamos $k = 0$. Por lo tanto, sin necesidad de distinguir entre x^+ y x^-,

$$x(t) = -a \arcsin\left\{ \sqrt{\frac{E-\epsilon}{\epsilon}} \cos\left[\sqrt{\frac{2E}{ma^2}}\,(t - t_0) \right] \right\}. \tag{131}$$

Evidentemente se trata de una función periódica del tiempo, como no podía ser de otro modo. La frecuencia angular es

$$\omega(E) = \sqrt{\frac{2E}{ma^2}}. \tag{132}$$

Nunca está de más verificar que las unidades son las correctas:

$$\sqrt{\frac{E}{ML^2}} = \sqrt{\frac{E}{ET^2}} = \frac{1}{T}. \tag{133}$$

Pasemos al cálculo de las variables de ángulo-acción. La acción es

$$J(E) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} dx\, \sqrt{E - \epsilon \sec^2 \frac{x}{a}}. \tag{134}$$

Esta integral ya no es tan fácil. Tratemos de avanzar por otros frentes. Calculemos $J'(E)$,

$$J'(E) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - \epsilon \sec^2 \frac{x}{a}}}. \tag{135}$$

Esta es la misma integral que resolvimos hace un momento, salvo que ahora el extremo superior de integración es $x_2(E)$. Usando el resultado (122) o notando que

$$J'(E) = \frac{1}{\pi} Q^+\big(x_2(E), E\big), \tag{136}$$

y usando la Ec. (126), resulta

$$J'(E) = \sqrt{\frac{ma^2}{2E}}. \tag{137}$$

De paso verificamos que esto es igual a la (frecuencia angular)$^{-1}$ que calculamos antes.

Está pendiente el cálculo de $J(E)$. La observación de que es relativamente fácil calcular $J'(E)$ da un método para calcular $J(E)$ que no requiere el cálculo de la integral que aparece en la Ec. (134). La solución es obvia: integremos $J'(E)$. A partir de la Ec. (137), resulta

$$J(E) = \sqrt{2ma^2E} + c. \tag{138}$$

Sólo falta encontrar la constante de integración correcta. Para eso necesitamos algún valor de E para el que resulte fácil evaluar $J(E)$. La acción es cero cuando la energía es igual al mínimo del potencial, porque en ese caso la órbita es un punto, y un punto tiene área cero. El mínimo del potencial ocurre en $x = 0$, donde

$$V(0) = \epsilon. \tag{139}$$

Debe ser entonces

$$J(\epsilon) = \sqrt{2ma^2\epsilon} + c = 0. \tag{140}$$

En definitiva,

$$J(E) = \sqrt{2ma^2}\left(\sqrt{E} - \sqrt{\epsilon}\right). \tag{141}$$

Cuando uno calcula $J(E)$ de esta manera, pierde un poco de sentido la parte del enunciado que pide calcular $J'(E)$ a partir de la expresión explícita de $J(E)$.

El método de calcular una integral definida a partir de su derivada respecto de alguno de los parámetros de los que depende fue popularizado por Feynman. Tanto es así que se conoce como "the Feynman's trick". En su autobiografía, Feynman escribe lo siguiente:

> The book also showed how to differentiate parameters under the integral sign – it's a certain operation. It turns out that's not taught very much in the universities; they don't emphasize it. But I caught on how to use that method, and I used that one damn tool again and again. So because I was self-taught using that book, I had peculiar methods of doing integrals.
>
> The result was that, when guys at MIT or Princeton had trouble doing a certain integral, it was because they couldn't do it with the standard methods they had learned in school. If it was contour integration, they would have found it; if it was a simple series expansion, they would have found it. Then I come along and try differentiating under the integral sign, and often it worked. So I got a great reputation for doing integrals, only because my box of tools was different from everybody else's, and they had tried all their tools on it before giving the problem to me.[†]

El libro del que habla es *Advanced Calculus*, de F. S. Woods, del año 1934.

Leyendo nuevamente el enunciado del problema, vemos que pide calcular $J'(E)$ sin calcular $J(E)$. Pero no dice nada de calcular $J(E)$ sin calcular $J'(E)$. Tal vez en una edición futura agreguemos esa cláusula.

[†] R. P. Feynman, *"Surely you're joking, Mr. Feynman!" Adventures of a Curious Character.*

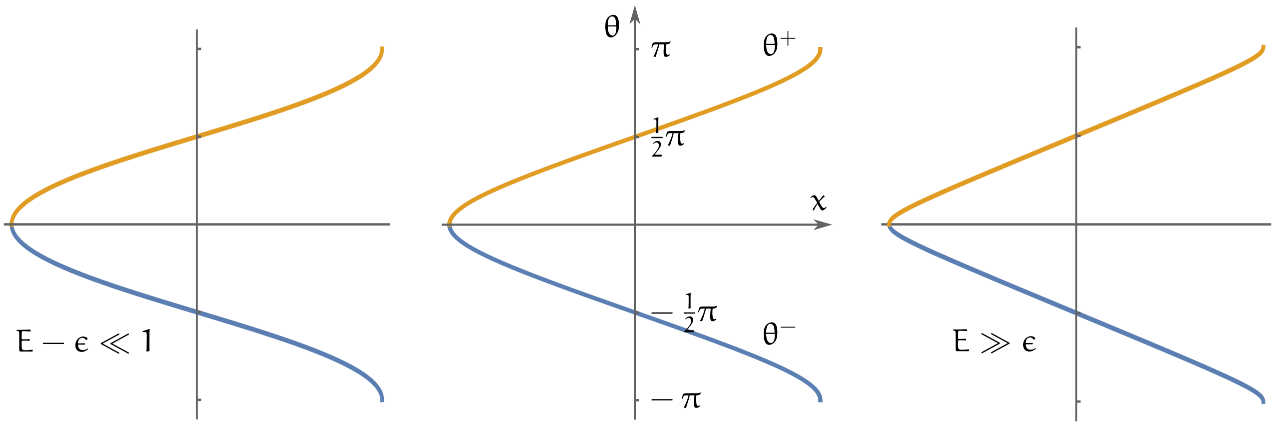
Pasemos ahora al cálculo de las variables ángulo $\theta^{\pm}$. Lo más sencillo es escribirlas en términos de x y E a partir de la Ec. (45),

$$\theta^{\pm}(x, E) = \frac{1}{J'(E)} \frac{\partial W^{\pm}(x, E)}{\partial E} = \frac{1}{J'(E)} Q^{\pm}(x, E). \tag{142}$$

Usando las Ecs. (126) y (137), queda

$$\theta^{\pm}(x, E) = \pm \arccos\left(-\sqrt{\frac{E}{E - \epsilon}} \, \sin\frac{x}{a} \right). \tag{143}$$

La figura muestra las variables $\theta^{\pm}$ como funciones de x para un tres valores crecientes de la energía E.



A medida que aumenta la energía, la curva va adoptando una forma cada vez más triangular. Para $E - \epsilon \ll 1$, la curva tiende a una forma sinusoidal. Lo primero es característico de un pozo de potencial; lo segundo corresponde a un oscilador armónico. Estos son los dos límites a los que tiende el comportamiento del sistema para $E \gg \epsilon$ y $E - \epsilon \ll 1$, respectivamente.

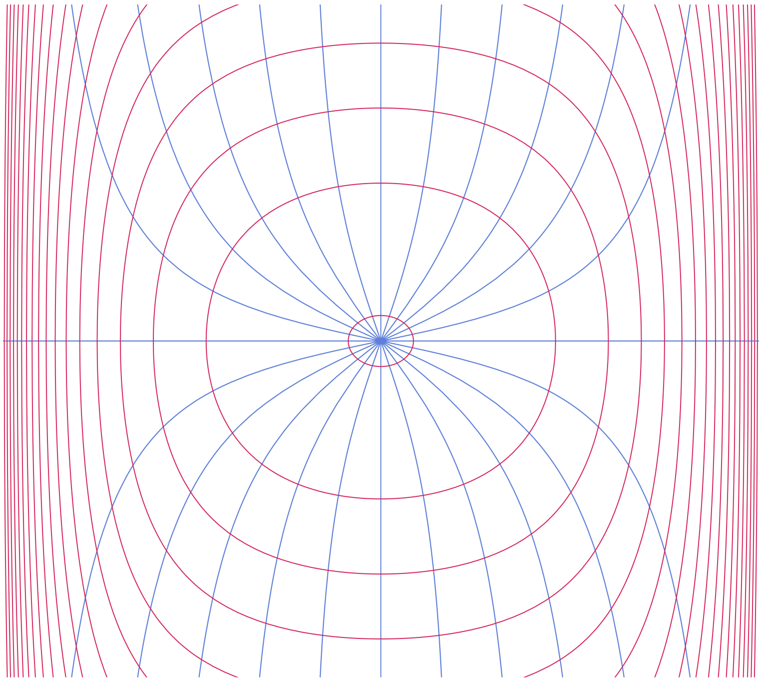
En términos de las coordenadas originales, las ecuaciones de transformación son

$$\begin{aligned} \theta(x, p) &= \text{signo}(p) \, \arccos\left[-\sqrt{\frac{E(x,p)}{E(x,p) - \epsilon}} \, \sin\frac{x}{a} \right], \\ J(x, p) &= \sqrt{2ma^2} \left[\sqrt{E(x,p)} - \sqrt{\epsilon} \right], \end{aligned} \tag{144}$$

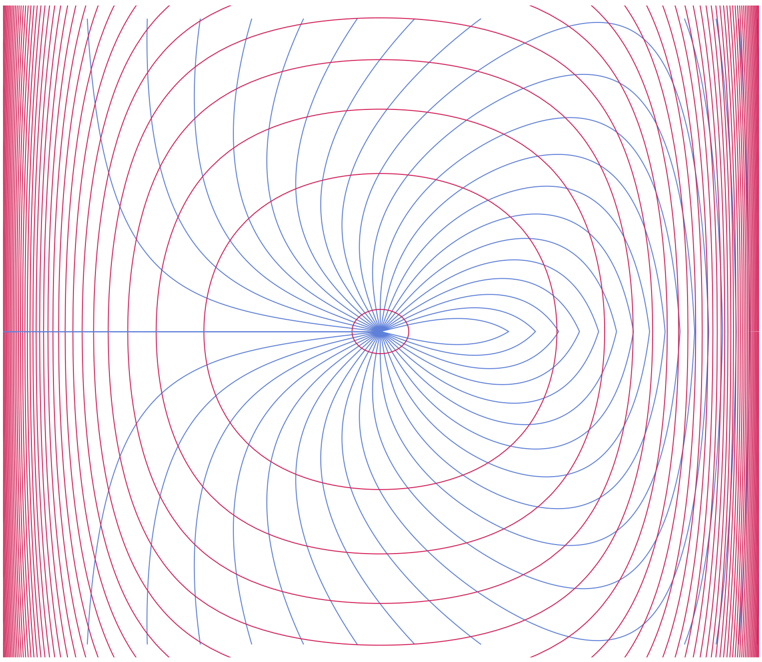
donde

$$E(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \epsilon \sec^2\frac{x}{a}. \tag{145}$$

Las curvas coordenadas de θ y J se muestran en la siguiente figura.



A modo de comparación, abajo graficamos también la curvas coordenadas de las variables Q y E. Notar lo patológicas que se vuelven estas curvas para $x > 0$.



Por último, escribamos el hamiltoniano como función de la variable de acción, esto es, la energía como función de J,

$$H(J) = \left(\frac{J}{\sqrt{2ma^2}} + \sqrt{\epsilon}\right)^2. \tag{146}$$