Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Guía 8: *Problemas 1, 2 y 3.*[*]

1. La ecuación de Hamilton–Jacobi 1
 1.1. Problema 1, ítems a y b 4
2. La función W 8
 2.1. Problema 1, ítem c 11
3. Problema 2 12
4. Problema 3 18
5. Problema 3 revisitado 23

1. La ecuación de Hamilton–Jacobi

Consideremos un sistema de n grados de libertad cuya dinámica se rija por el hamiltoniano $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$. Dada una función generatriz de tipo 2,

$$F_2 = F_2(\mathbf{q},\mathbf{P},t), \tag{1}$$

el nuevo hamiltoniano, escrito en una mezcla equitativa de variables, es

$$K(\mathbf{q},\mathbf{P},t) = \frac{\partial F_2(\mathbf{q},\mathbf{P},t)}{\partial t} + H\Big(\mathbf{q},\mathbf{p}(\mathbf{q},\mathbf{P},t),t\Big) = \frac{\partial F_2(\mathbf{q},\mathbf{P},t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q},\frac{\partial F_2(\mathbf{q},\mathbf{P},t)}{\partial \mathbf{q}},t\right). \tag{2}$$

Asumamos que

$$K(\mathbf{q},\mathbf{P},t) = 0. \tag{3}$$

Es decir, F_2 tiene que satisfacer la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial F_2(\mathbf{q},\mathbf{P},t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q},\frac{\partial F_2(\mathbf{q},\mathbf{P},t)}{\partial \mathbf{q}},t\right) = 0. \tag{4}$$

Si el nuevo hamiltoniano es cero, será cero independientemente del conjunto de variables que usemos para escribirlo. Es decir, considerado función de sus variables naturales $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{P}$, será igualmente cierto que

$$K(\mathbf{Q},\mathbf{P},t) = 0. \tag{5}$$

La dinámica de las nuevas coordenadas es trivial,

$$\dot{\mathbf{Q}} = 0, \qquad \dot{\mathbf{P}} = 0. \tag{6}$$

La dinámica de las coordenadas $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$ se obtiene de las ecuaciones de transformación,

$$\mathbf{p} = \frac{\partial F_2(\mathbf{q},\mathbf{P},t)}{\partial \mathbf{q}}, \qquad \mathbf{Q} = \frac{\partial F_2(\mathbf{q},\mathbf{P},t)}{\partial \mathbf{P}}. \tag{7}$$

Estas son ecuaciones implícitas para $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ y el tiempo. La cuestión, entonces, no es tanto resolver las ecuaciones de movimiento, sino encontrar una función generatriz que tenga la propiedad de llevar al hamiltoniano nulo. Luego hay que derivar e invertir funciones.

[*]zanellaj@df.uba.ar

La función generatriz F_2 de la que hablamos satisface la Ec. (4),

$$\frac{\partial F_2(\mathbf{q},\mathbf{P},t)}{\partial t}+H\left(\mathbf{q},\frac{\partial F_2(\mathbf{q},\mathbf{P},t)}{\partial \mathbf{q}},t\right)=0. \tag{8}$$

Podría pensarse que para encontrar F_2 todo lo que tenemos que hacer es resolver esta ecuación. Pero hay una dificultad. Considerada como ecuación diferencial, la Ec. (8) es un poco anómala, porque las variables $\mathbf{P}$ no juegan ningún papel. Es cierto que si tenemos, por ejemplo, una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=0, \tag{9}$$

la solución es

$$f(x,y,z)=C(y,z). \tag{10}$$

En la práctica, lo que terminamos haciendo es olvidarnos del resto de las variables y resolver la ecuación diferencial

$$f'(x)=0, \tag{11}$$

y usamos la constante de integración para alojar al resto de las variables. Algo análogo podemos hacer con la Ec. (8). Escribiremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial S(\mathbf{q},t)}{\partial t}+H\left(\mathbf{q},\frac{\partial S(\mathbf{q},t)}{\partial \mathbf{q}},t\right)=0, \tag{12}$$

donde S, en principio, depende sólo de $\mathbf{q}$ y de t,

$$S=S(\mathbf{q},t), \tag{13}$$

y luego veremos cómo aprovechar las constantes de integración para acomodar al resto de las variables que necesitamos para definir una función generatriz. La Ec. (12) es la ecuación de H–J.

Supongamos que la solución de la Ec. (12) involucra n constantes de integración. Esto no tiene nada de extraño. Ecuaciones tan simples como

$$x'(y)+x(y)=0 \tag{14}$$

tienen por solución funciones que dependen de constantes de integración arbitrarias,

$$x(y)=\alpha e^{-y}. \tag{15}$$

Estrictamente hablando, esta es una función tanto de y como de α. Deberíamos escribir

$$x(y,\alpha)=\alpha e^{-y}. \tag{16}$$

Por lo tanto, si encontramos una solución de la Ec. (12), lo más probable es que dependa de cierto número de constantes arbitrarias $\boldsymbol{\alpha}$. Así, una vez resuelta la ecuación diferencial, la función S será función de $\mathbf{q}$, de t y de las constantes de integración:

$$S = S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t). \tag{17}$$

Lo importante para nosotros es que el número de constantes de integración sea n, y que ninguna de esas constantes sea meramente aditiva, ya veremos por qué.

En resumen, tenemos una función de n variables $\mathbf{q}$, de n variables $\boldsymbol{\alpha}$ y de t, y esa función satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0. \tag{18}$$

Según la Ec. (8), esto es exactamente la definición de una función generatriz de tipo F_2 que lleva de H al hamiltoniano nulo. Una función $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$, solución de la ecuación de H–J y que contiene n constantes de integración independientes, ninguna de ellas aditiva, es lo que se conoce como una integral completa.

Noten que para llegar hasta aquí hemos usado dos hechos independientes. Primero escribimos la ecuación que debe satisfacer una función generatriz de tipo F_2 para llevar de H al hamiltoniano nulo. Esa función F_2 viene con sus propios conjuntos de n variables $\mathbf{q}$ y de n variables $\mathbf{P}$, además del tiempo. La función F_2 satisface una ecuación que involucra a sus derivadas respecto al tiempo y a las variables $\mathbf{q}$. Las variables $\mathbf{P}$ no juegan ningún papel en esa ecuación. Si retenemos la ecuación pero en lugar de F_2 escribimos una función $S(\mathbf{q}, t)$, resulta una ecuación diferencial propiamente dicha para $S(\mathbf{q}, t)$. Luego asumimos que no sólo somos capaces de resolver esa ecuación diferencial, sino que, en el proceso de encontrar la solución, tenemos que introducir n constantes de integración independientes, ninguna de ellas aditiva. Finalmente, conectamos los dos hechos: esta solución tiene todas las propiedades de una F_2 que lleva al hamiltoniano nulo. El lugar ocupado por las n constantes $\boldsymbol{\alpha}$ puede ser ocupado por los n impulsos $\mathbf{P}$.

Esto puede ser lo que más confunda en una primera lectura del método de H–J. Uno no resuelve la ecuación

$$\frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0, \tag{19}$$

sino esta otra

$$\frac{\partial S(\mathbf{q}, t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S(\mathbf{q}, t)}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0. \tag{20}$$

La primera ecuación es una relación que involucra las derivadas de la función F_2 respecto de $\mathbf{q}$ y de t, pero no dice nada de las variables $\mathbf{P}$. En cambio, la Ec. (20) es una ecuación diferencial en derivadas parciales respecto de $\mathbf{q}$ y de t para una función de $\mathbf{q}$ y de t. Es lo más natural del mundo que al resolver esta ecuación diferencial encontremos toda una familia de soluciones,

$$S = S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t), \tag{21}$$

parametrizada por cierto número de constantes arbitrarias independientes. Si el número de estas constantes es justo n, y ninguna de ellas es meramente aditiva, habremos encontrado una función generatriz de tipo F_2 que lleva al hamiltoniano nulo. El arte del método consiste en dar con esta familia de soluciones.

El lugar de la constante aditiva que siempre podemos sumar a S, puesto que la Ec. (20) sólo involucra a sus derivadas, no puede usarse para alojar uno de los nuevos impulsos. Por ejemplo, consideremos un sistema con un solo grado de libertad. Supongan que hemos resuelto la Ec. (12) y que la solución depende de una constante aditiva arbitraria,

$$S(q, \alpha, t) = G(q, t) + \alpha. \tag{22}$$

Si intentáramos usar esta función como una función generatriz de tipo F_2, obtendríamos las siguientes ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q} = \frac{\partial G(q, t)}{\partial q}, \\ Q &= \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial P} = 1. \end{aligned} \tag{23}$$

Tendríamos que poder invertir estas ecuaciones para escribir q y p en términos de Q y P. Pero eso es imposible. La misma dificultad se encuentra en general cuando se pretende usar el lugar de la constante aditiva para alojar uno de los nuevos impulsos: las ecuaciones de transformación están mal planteadas. De ahí que la constante aditiva sea irrelevante.

1.1. Problema 1, ítems a y b

Veamos cómo funciona el método de H–J en la práctica. El ejemplo más simple lo proporciona una partícula de masa m moviéndose sobre el eje x bajo la influencia de un potencial $V(x)$. El hamiltoniano es

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{24}$$

Como el sistema tiene un solo grado de libertad, la ecuación de H–J es de la forma

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S(x, t)}{\partial x}\right) = 0. \tag{25}$$

Explícitamente, para el hamiltoniano (24),

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\frac{\partial S(x, t)}{\partial x}\right]^2 + V(x) = 0. \tag{26}$$

Hasta ahora no hay ninguna señal de las constantes de integración. El método habitual para encontrar una solución de esta ecuación consiste en proponer la siguiente separación de variables:

$$S(x,t) = T(t) + W(x). \tag{27}$$

Reemplazando en la Ec. (26),

$$T'(t) + \frac{W'(x)^2}{2m} + V(x) = 0. \tag{28}$$

Ahora bien, si la suma de una función de t y una función de x es cero, eso implica que cada una de las funciones tiene que ser igual a una constante, y la suma de estas constantes debe ser cero,

$$\begin{aligned} &T'(t) = -\alpha, \\ &\frac{W'(x)^2}{2m} + V(x) = \alpha. \end{aligned} \tag{29}$$

La primera ecuación es trivial,

$$T(t) = -\alpha t, \tag{30}$$

o, más precisamente,

$$T(t,\alpha) = -\alpha t. \tag{31}$$

Es cierto que podríamos sumar una constante aditiva, pero recuerden que estamos, por principio, en contra de las constantes meramente aditivas. Cuando resolvamos la segunda Ec. (29), la función W dependerá explícitamente de la constante de separación α. Será

$$W = W(x,\alpha). \tag{32}$$

Finalmente, lo que tenemos es una función que depende del número correcto de variables,

$$S(x,\alpha,t) = -\alpha t + W(x,\alpha), \tag{33}$$

y que, por construcción, si se emplea como función generatriz de tipo F_2, conduce al hamiltoniano nulo.

La constante α tiene una interpretación física. Por un lado, tenemos la ecuación de transformación

$$p = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x}. \tag{34}$$

De modo que la segunda Ec. (29) puede leerse como

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = \alpha. \tag{35}$$

Es decir, la constante α es la energía. Para un hamiltoniano que no depende explícitamente del tiempo, la energía es constante, así que no es tan extraño descubrir que esa constante aparezca al resolver la ecuación de H–J.

En general, si el hamiltoniano no depende de t, uno busca una solución de la forma

$$S(\mathbf{q}, t) = -Et + W(\mathbf{q}). \tag{36}$$

La ecuación de H–J se reduce entonces a

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right) = E. \tag{37}$$

Esta es la llamada ecuación de H–J independiente del tiempo. Más adelante veremos que la propia función W puede ser considerada una función generatriz, siempre y cuando dependa del número suficiente de constantes de integración independientes. La función W recibe el nombre de función característica de Hamilton.

Para el problema unidimensional que propusimos más arriba, la ecuación de H–J independiente del tiempo es

$$\frac{W'(x)^2}{2m} + V(x) = E. \tag{38}$$

Uno descubre entonces que no ha encontrado una función W, sino dos:

$$W^{\pm}(x, E) = \pm\sqrt{2m} \int^{x} dx\, \sqrt{E - V(x)}. \tag{39}$$

Aparte de eso, noten que recién al escribir la solución de la ecuación diferencial incluimos a E entre las variables de las que depende W. Puesto que, una vez fijada la energía, para cada valor de x existen dos posibles valores de p, y debido a que $p = W'(x)$, es natural que sean necesarias dos funciones W para describir el movimiento. Los tramos de la órbita en los que $p \geqslant 0$ serán descriptos por la función W^{+}, y viceversa. Si queremos fijar completamente las funciones $W^{\pm}$, tenemos que elegir los límites inferiores de integración en la Ec. (39). Lo más práctico es elegir el mismo límite para las dos funciones W, digamos, x_0:

$$W^{\pm}(x, E) = \pm\sqrt{2m} \int_{x_0}^{x} dx\, \sqrt{E - V(x)}. \tag{40}$$

En general, el límite inferior de integración puede ser una función de E. Eso no altera la circunstancia de que W satisfaga la ecuación de H–J independiente del tiempo. De hecho, en la mayoría de los problemas elegiremos x_0 como uno de los puntos de retorno, si es que existen. Los puntos de retorno evidentemente pueden depender de E. Eso, que promete complicar las cosas, en realidad las simplifica.

En resumen, hemos obtenido dos soluciones de la ecuación de H–J. Estas soluciones dependen del número exacto de variables necesario para definir dos funciones generatrices de tipo F_2,

$$F_2^{\pm}(x, P, T) = S^{\pm}(x, P, t) = -Pt + W^{\pm}(x, P). \tag{41}$$

Estas funciones llevan al hamiltoniano nulo,

$$K\big(Q^{\pm}, P, t\big) = 0. \tag{42}$$

El hamiltoniano podrá ser nulo, pero no deja de ser una función de tres variables. Según demostramos más arriba, por construcción

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = P. \tag{43}$$

Debido a que esta constante es la energía, en lugar de usar la letra P, lo más práctico es seguir usando la letra E. Es decir, el nuevo impulso será E.

La dinámica de las nuevas variables es trivial, tanto $Q^{\pm}$ como E son constantes. La dinámica de las variables originales está codificada en las ecuaciones de transformación,

$$Q^{\pm} = \frac{\partial S^{\pm}(x, E, t)}{\partial E} = -t + \frac{\partial W^{\pm}(x, E)}{\partial E}. \tag{44}$$

Estas son dos ecuaciones implícitas para $x(t)$, una válida para los tramos del movimiento en los que $p \geqslant 0$ y la otra para los tramos en los que $p \leqslant 0$. Explícitamente, usando la Ec. (40),

$$t + Q^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{45}$$

Como el integrando es positivo, cuando $t = -Q^{\pm}$, resulta $x = x_0$. Si definimos $t_0^{\pm} = -Q^{\pm}$, obtenemos

$$t - t_0^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{46}$$

De modo que estamos escribiendo las ecuaciones implícitas que determinan las soluciones generales para $x^{\pm}(t)$ cuando

$$x^{\pm}\big(t_0^{\pm}\big) = x_0. \tag{47}$$

El método de H–J no conduce a un resultado revelador, al menos no para este problema. Llegamos a donde hubiera llegado un alumno de Física 1 con los conocimientos básicos para plantear la conservación de la energía y leer de esa conservación una ecuación diferencial. En efecto, el alumno de Física 1 hubiera partido de la ecuación

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E, \tag{48}$$

y, entonces, habría despejado

$$dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{49}$$

Finalmente, integrando entre t_0 y t a un lado de la ecuación y entre x_0 y x, al otro, queda

$$t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \tag{50}$$

que es el mismo resultado al que arribamos por el método de H–J, sin el escrúpulo particular de usar dos t_0 distintos para cada rama de la solución.

2. La función W

Un resumen de lo hecho hasta aquí. Cuando el hamiltoniano no depende del tiempo, podemos buscar la solución de la ecuación de H–J entre las funciones de la forma

$$S(\mathbf{q}, t) = -Et + W(\mathbf{q}), \tag{51}$$

donde la función W satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right) = E. \tag{52}$$

Esta es la ecuación de H–J independiente del tiempo para la función característica de Hamilton. El hecho de que en esta ecuación aparezca la constante E nos asegura que la solución dependerá, al menos, de una variable extra. En un problema con un solo grado de libertad, eso es todo lo que necesitamos para definir una función generatriz de tipo F_2,

$$F_2(q, E, t) = S(q, E, t) = -Et + W(q, E). \tag{53}$$

En problemas con más de un grado de libertad, necesitaremos encontrar una solución de la Ec. (52) que dependa de otras $n - 1$ constantes de integración independientes, ninguna de ellas meramente aditiva; digamos, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Si llamamos α_1 a E, la función

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = -\alpha_1 t + W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}), \tag{54}$$

considerada como una función generatriz de tipo F_2, conducirá al hamiltoniano nulo, puesto que

$$K(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \mathbf{q}}\right) = -\alpha_1 + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{q}}\right), \tag{55}$$

y, por construcción,

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{q}}\right) = \alpha_1. \tag{56}$$

El lugar que ocupan las constantes $\boldsymbol{\alpha}$ puede ser ocupado por los nuevos impulsos. Para no multiplicar la notación, escribiremos $\mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}$. Explícitamente,

$$K(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = 0. \tag{57}$$

La constante de separación α_1 tiene un lugar especial, puesto que la ecuación de transformación para Q_1 proporciona una relación entre las variables originales y el tiempo,

$$Q_1 = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_1} = -t + \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_1}. \tag{58}$$

O bien,

$$t + Q_1 = \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_1}. \tag{59}$$

El resto de las ecuaciones de transformación da un conjunto de $n-1$ ecuaciones que, junto con la ecuación anterior, pueden ser usadas para determinar las funciones $\mathbf{q}(t)$,

$$Q_i = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i}, \qquad i > 1. \tag{60}$$

Finalmente, los impulsos $\mathbf{p}$ están dados por las ecuaciones de transformación

$$p(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{q}}. \tag{61}$$

Es decir, para sistemas cuyo hamiltoniano no depende de t, uno resuelve la ecuación de H–J para la función S, y esta función es considerada como una función generatriz de tipo F_2 que conduce al hamiltoniano nulo. Las ecuaciones de transformación dependen de $2n$ constantes y de t, proporcionando la información suficiente para obtener $\mathbf{q}(t)$ y $\mathbf{p}(t)$.

Ahora bien, la propia función $W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ depende del número adecuado de variables para ser considerada ella misma una función generatriz de tipo F_2. En el rol de función generatriz de tipo F_2, la función W tiene la particularidad de que no depende del tiempo, de modo que el nuevo hamiltoniano es igual al hamiltoniano original. Eso no quiere decir que sean la misma función. Quiere decir que el nuevo hamiltoniano es

$$K(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\alpha}) = H\big(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\alpha}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\alpha})\big). \tag{62}$$

Lo más inmediato para nosotros es escribirlo en una mezcla de variables nuevas y antiguas, usando parcialmente las ecuaciones de transformación,

$$K(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{q}}\right). \tag{63}$$

Pero W satisface la Ec. (56), de manera que cuando tratamos a $W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ como una función generatriz de tipo F_2, el nuevo hamiltoniano es

$$K(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1. \tag{64}$$

Como en el miembro de la derecha no aparece ninguna q, esto es lo mismo que decir que

$$K(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1. \tag{65}$$

Lo más habitual es llamar E a α_1, porque, después de todo, α_1 es igual a la energía. También es usual usar el mismo símbolo H para la función K, puesto que, formalmente, $K = H$.

Cuando se usa S como función generatriz, la dinámica de las nuevas coordenadas e impulsos es trivial: son todos constantes. Cuando se usa W como función generatriz, la dinámica es apenas menos trivial. Debido a que en el hamiltoniano (65) las coordenadas $\mathbf{Q}$ son cíclicas, los nuevos impulsos siguen siendo constantes, pero ahora

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{\partial K}{\partial \alpha_1} = 1, \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = 0, \qquad i > 1. \end{aligned} \tag{66}$$

En otras palabras,

$$Q_1(t) = t - t_0, \tag{67}$$

y el resto de las Q_i son constantes. La dinámica de las variables originales se obtiene combinando estos resultados con las ecuaciones de transformación. La ecuación de transformación para Q_1 es

$$Q_1 = \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_1}. \tag{68}$$

Usando la Ec. (67), obtenemos una ecuación que involucra al tiempo y a las coordenadas originales,

$$t - t_0 = \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_1}. \tag{69}$$

Si el sistema tiene un solo grado de libertad, el problema termina aquí. Si hay más de un grado de libertad, el resto de las ecuaciones de transformación,

$$Q_i = \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i}, \qquad i > 1, \tag{70}$$

proporcionará, en principio, el número suficiente de ecuaciones para obtener, al menos de manera implícita, la dependencia temporal de las n coordenadas. Las Ecs. (69) y (70) son equivalentes a las Ecs. (59) y (60).

En la práctica, tratándose de hamiltonianos independientes del tiempo, lo más frecuente es usar como función generatriz la función W. El nuevo hamiltoniano es igual a E, que es también el nuevo impulso conjugado de la nueva variable Q_1.

2.1. Problema 1, ítem c

Retomando el ejemplo de la partícula de masa m en un potencial $V(x)$. La ecuación de H–J independiente del tiempo es

$$\frac{W'(x)^2}{2m} + V(x) = E. \tag{71}$$

Las soluciones son

$$W^{\pm}(x, E) = \pm\sqrt{2m} \int_{x_0}^{x} dx \, \sqrt{E - V(x)}. \tag{72}$$

Cuando se usa $W^{\pm}(x, E)$ como función generatriz, el nuevo hamiltoniano es

$$K\big(Q^{\pm}, E\big) = E, \tag{73}$$

de manera que

$$\dot{Q}^{\pm} = \frac{\partial K}{\partial E} = 1 \quad \Rightarrow \quad Q^{\pm}(t) = t - t_0^{\pm}. \tag{74}$$

Por otro lado, la ecuación de transformación para $Q^{\pm}$ es

$$Q^{\pm}(x, E) = \frac{\partial W^{\pm}(x, E)}{\partial E} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \tag{75}$$

Luego, combinando ambos resultados,

$$t - t_0^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}, \tag{76}$$

que es la ecuación implícita para las dos ramas de la solución $x(t)$. Este resultado es equivalente al encontrado usando la función S. La mayoría de las cuentas son las mismas.

No hay una ventaja computacional entre resolver el problema usando la función S o la función W. En la práctica, es más cómodo usar la función W, porque verdaderamente lo que uno siempre termina resolviendo es la ecuación de H–J independiente del tiempo. La función S resulta un intermediario innecesario. Además, cuando veamos las variables de ángulo-acción, el objeto fundamental será la función W.

Otro aspecto importante del método de H–J es que no es necesario escribir la expresión explícita de la función W. Lo que queremos decir es que suele ser suficiente obtener una expresión integral para W, como en la Ec. (72). Lo importante son las derivadas de W y suele ser mucho más sencillo derivar la expresión integral bajo el signo de integración y luego integrar, que integrar y luego derivar. Es decir, usando el ejemplo que vimos antes, lo habitual es que sea mucho más fácil resolver la integral de la Ec. (76) que integrar la Ec. (72) y luego calcular su derivada. La clave del asunto es que, por lo común, es más fácil resolver las integrales cuando la raíz cuadrada aparece en el denominador. Cuando veamos las variables de ángulo-acción, tendremos que resolver forzosamente integrales de la forma (72). Ahí quedará todo más claro.

El siguiente problema muestra cómo resolver, mediante el método de H–J, el movimiento de un sistema con un solo grado de libertad. Es el problema del oscilador armónico. Más sencillo que eso es el problema de la partícula libre en una dimensión. Tal vez no sería una mala idea que aplicaran el método de H–J primero a ese problema.

3. Problema 2

El hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional es

$$H(q,p) = \tfrac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right). \tag{77}$$

a) Escribir la ecuación de H–J independiente del tiempo y la expresión integral de la función W. En este caso no es difícil calcular W, pero no es necesario.

b) A partir de la expresión integral de la función W, encontrar la solución general $q(t)$. Como se señaló antes, no es necesario calcular la función W, sólo sus derivadas.

■ **Solución**. Como el sistema es conservativo, podemos escribir directamente la ecuación de H–J independiente del tiempo. En general es

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = E, \tag{78}$$

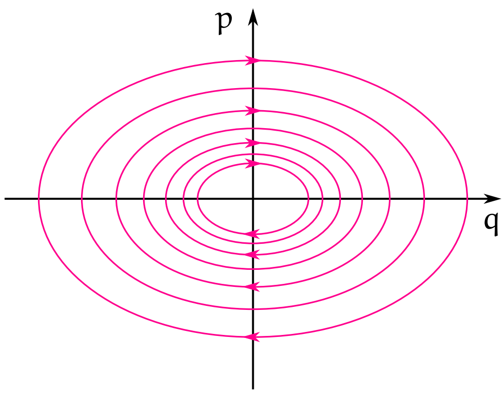
donde W es la función característica de Hamilton. Si hay un solo grado de libertad, la ecuación anterior se escribe como

$$H\Big(q, W'(q)\Big) = E. \tag{79}$$

Para el oscilador, queda

$$\tfrac{1}{2}\Big[W'(q)^2 + \omega^2 q^2\Big] = E. \tag{80}$$

Las trayectorias en el espacio de fase son elipses. Debido a que $\dot{q} = p$, el sentido de circulación es el sentido horario. Cada órbita tiene dos puntos de retorno.



La Ec. (80) puede reescribirse como

$$W'(q) = \pm\sqrt{2E - \omega^2 q^2}. \tag{81}$$

Vemos entonces que no hay una función W, sino dos. Debido a que $W'(q) = p$, el signo positivo corresponde a los tramos del movimiento en los que $p \geqslant 0$, mientras que el signo negativo corresponde a los tramos en los que $p \leqslant 0$. Para distinguir las dos funciones W o, si se quiere, las dos ramas de la función bivaluada W, definiremos las funciones $W^{\pm}$, donde, de acuerdo a la ecuación anterior,

$$\frac{dW^{\pm}(q)}{dq} = \pm\sqrt{2E - \omega^2 q^2}. \tag{82}$$

Alcanza con escribir la solución formal de estas ecuaciones,

$$W^{\pm}(q, E) = \pm \int^{q} dx\, \sqrt{2E - \omega^2 x^2}. \tag{83}$$

Hay que notar que, al resolver la ecuación diferencial, las funciones $W^{\pm}$ dependerán explícitamente de E. Este hecho es fundamental, porque para definir la función generatriz necesitamos que W dependa de una variable extra. Esta segunda variable sirve para acomodar el nuevo impulso.

En principio, no hay ninguna necesidad de resolver la integral de la Ec. (83). Lo importante aquí son las derivadas de la función W, que suelen calcularse más fácilmente derivando la expresión integral antes de resolver la integral propiamente dicha. Para definir con precisión las funciones $W^{\pm}$, debemos fijar el límite inferior de las integrales. La elección más práctica suele ser elegir ese límite como un punto en donde se anule el integrando, es decir, un valor de q que corresponda a $p(q) = 0$. Usualmente, aunque no siempre, esto corresponderá a puntos de retorno, puntos donde $\dot{q} = 0$. En el caso del oscilador ocurre eso, puesto que $\dot{q} = p$. Debido a que $p^2 + \omega^2 q^2 = 2E$, el impulso se anula cuando

$$2E - \omega^2 q^2 = 0. \tag{84}$$

Tomaremos como extremo inferior de las integrales el punto de retorno de la izquierda, que satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\omega q^-}{\sqrt{2E}} = -1. \tag{85}$$

Así, q^- es en verdad una función de E. Luego,

$$W^{\pm}(q, E) = \pm \int_{q^-(E)}^{q} dx\, \sqrt{2E - \omega^2 x^2}. \tag{86}$$

Estas funciones $W^{\pm}$, consideradas como funciones generatrices de tipo F_2, conducen al nuevo hamiltoniano

$$H\big(Q^{\pm}, E\big) = E, \tag{87}$$

donde $Q^{\pm}$ son las nuevas coordenadas y E es el nuevo impulso. Es cierto que deberíamos usar un símbolo distinto para este hamiltoniano, pero como la transformación no depende del tiempo, K o H' o H^* o como quiera que llamen al nuevo hamiltoniano es igual a H, de manera que sólo estamos abusando un poco de la notación.

Las ecuaciones de transformación que definen las nuevas coordenadas son las que corresponden a una F_2,

$$Q^{\pm} = \frac{\partial W^{\pm}}{\partial E}. \tag{88}$$

Derivando la integral de la Ec. (86) bajo el signo de integración, resulta

$$Q^{\pm} = \pm \int_{q^-(E)}^{q} \frac{dx}{\sqrt{2E - \omega^2 x^2}}. \tag{89}$$

Aunque el extremo inferior de la integral en la Ec. (86) depende de E, esa dependencia es irrelevante al calcular la derivada de $W^{\pm}$ respecto de E. Sucede que al derivar respecto al límite de integración, hay que evaluar el integrando en ese límite. Pero, por construcción, el integrando que aparece en la Ec. (86) se anula en el límite inferior de integración. Dicho con más detalle, si

$$F(z) = \int_{a(z)}^{b(z)} dx\, f(x, z), \tag{90}$$

de acuerdo a la regla integral de Leibniz, su derivada es

$$\frac{d}{dz}\left[\int_{a(z)}^{b(z)} dx\, f(x, z)\right] = f\big(b(z), z\big)b'(z) - f\big(a(z), z\big)a'(z) + \int_{a(z)}^{b(z)} dx\, \frac{\partial f(x, z)}{\partial z}. \tag{91}$$

Esta es una generalización bastante evidente del teorema fundamental del cálculo. Nosotros tenemos que calcular la derivada respecto de E de las funciones

$$W^{\pm}(q, E) = \pm \int_{q^-(E)}^{q} dx\, \sqrt{2E - \omega^2 x^2}. \tag{92}$$

La aplicación de la regla de Leibniz da

$$\frac{\partial W^{\pm}(q, E)}{\partial E} = \pm\left[-\frac{dq^-(E)}{dE}\sqrt{2E - \omega^2 q^-(E)^2} + \int_{q^-(E)}^{q} \frac{dx}{\sqrt{2E - \omega^2 x^2}}\right]. \tag{93}$$

Pero $q^-(E)$ es tal que el argumento de la primera raíz cuadrada es nulo, de modo que termina quedando la Ec. (89). En casi todos los problemas nos encontraremos con algo así.

Aunque las dos integrales son simples, la integral de la Ec. (89) es más simple que la que aparece en la Ec. (86). Para potenciales más complicados, la diferencia en el grado de dificultad de las dos integrales puede ser desmesurada. La integral de la Ec. (89) se resuelve usando la siguiente primitiva:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x. \tag{94}$$

Luego,

$$Q^{\pm} = \pm\frac{1}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\right) - \arcsin\left(\frac{\omega q^{-}(E)}{\sqrt{2E}}\right)\right]. \tag{95}$$

Aquí también la elección del límite de integración simplifica los cálculos, porque

$$\frac{\omega q^{-}(E)}{\sqrt{2E}} = -1. \tag{96}$$

En definitiva,

$$Q^{\pm} = \pm\frac{1}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\right) + \frac{\pi}{2}\right] = \pm\frac{1}{\omega}\arccos\left(-\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\right). \tag{97}$$

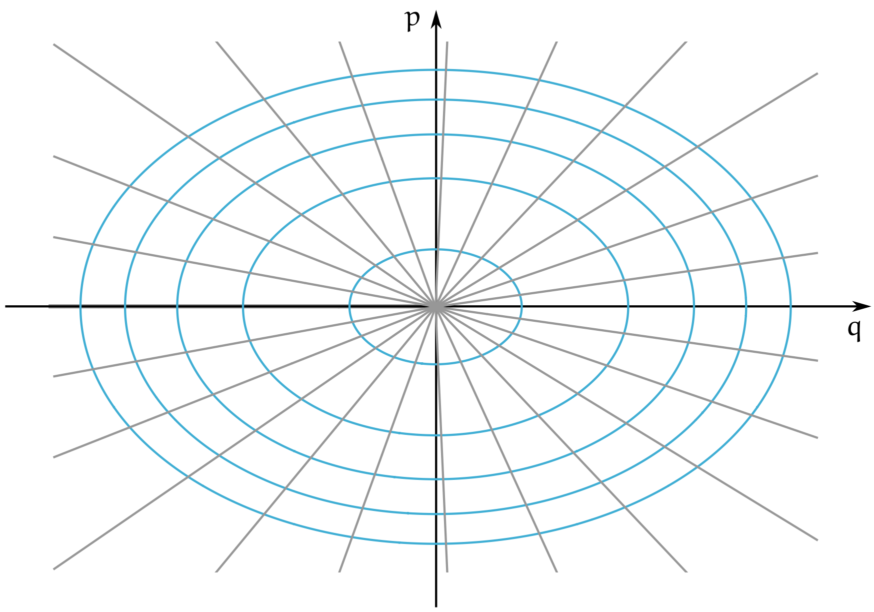
Para exhibir cabalmente la ecuación de transformación, escribamos

$$2E = p^2 + \omega^2 q^2, \tag{98}$$

de manera que

$$Q^{\pm}(q,p) = \pm\frac{1}{\omega}\arccos\left(-\frac{\omega q}{\sqrt{p^2+\omega^2 q^2}}\right) = \pm\frac{1}{\omega}\arctan(-q,p). \tag{99}$$

Las curvas coordenadas de $Q^{\pm}$ en el plano qp son rectas que pasan por el origen. Así, las curvas coordenadas de las nuevas variables $Q^{\pm}$ y E tienen el siguiente aspecto.



Pueden relacionar esto con el problema 16 de la Guía 7.

Al aplicar el método de H–J, siempre hay dos pasos bien definidos. El primero es escribir las ecuaciones de transformación a partir de S o de W, según el caso. Eso ya lo hicimos. El segundo paso consiste en combinar estas ecuaciones de transformación con la dinámica de las nuevas coordenadas para obtener las ecuaciones que describen la evolución temporal de las coordenadas originales. Eso es lo que nos falta hacer.

La dinámica de las coordenadas $Q^{\pm}$ está dictada por el nuevo hamiltoniano

$$H\big(Q^{\pm}, E\big) = E. \tag{100}$$

La ecuación de Hamilton para las nuevas coordenadas es

$$\dot{Q}^{\pm} = \frac{\partial H}{\partial E} = 1 \quad \Rightarrow \quad Q^{\pm}(t) = t + Q_0^{\pm}. \tag{101}$$

Ahora conectamos los dos pasos del método de H–J. Usando el resultado anterior en la Ec. (97), obtenemos una ecuación implícita para $q(t)$,

$$t + Q_0^{\pm} = \pm\frac{1}{\omega}\arccos\left(-\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\right). \tag{102}$$

De aquí podemos despejar $q(t)$ o, mejor dicho, las dos ramas de la función $q(t)$,

$$q^{\pm}(t) = -\frac{\sqrt{2E}}{\omega}\cos\omega\big(t + Q_0^{\pm}\big)\,. \tag{103}$$

Cuando se produzca el paso entre una rama y la otra, la función y su derivada deben ser continuas. Eso implica que, a menos de un múltiplo entero de 2π,

$$\omega Q_0^{+} = \omega Q_0^{-} \equiv \varphi. \tag{104}$$

Así, no es necesario distinguir las dos ramas de la función $q(t)$. Simplemente es

$$q(t) = -\frac{\sqrt{2E}}{\omega}\cos(\omega t + \varphi). \tag{105}$$

Si nos atenemos al método de H–J, el impulso p se obtiene a partir de la ecuación

$$p^2 + \omega^2 q^2 = 2E. \tag{106}$$

Entonces, usando el resultado (105), queda

$$p(t) = \mathrm{signo}(p)\,\sqrt{2E}\;\left|\sin(\omega t + \varphi)\right|. \tag{107}$$

Esta ecuación es un poco insatisfactoria. Si estamos dispuestos a usar las ecuaciones de Hamilton, podemos obtener p a través de la ecuación de movimiento para q,

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p. \tag{108}$$

Luego, menos inequívocamente,

$$p(t) = \sqrt{2E}\sin(\omega t + \varphi). \tag{109}$$

Para terminar, vamos a calcular explícitamente la función W para mostrar el tipo de complicaciones que aparecen, totalmente innecesarias. Tenemos que

$$W^{\pm}(q, E) = \pm \int_{q^-(E)}^{q} dx\ \sqrt{2E - \omega^2 x^2} = \pm\sqrt{2E} \int_{q^-(E)}^{q} dx\ \sqrt{1 - \frac{\omega^2 x^2}{2E}}. \tag{110}$$

Necesitamos la siguiente integral indefinida,

$$\int dx\ \sqrt{1 - x^2}. \tag{111}$$

Aquí funciona la sustitución $x = \sin u$,

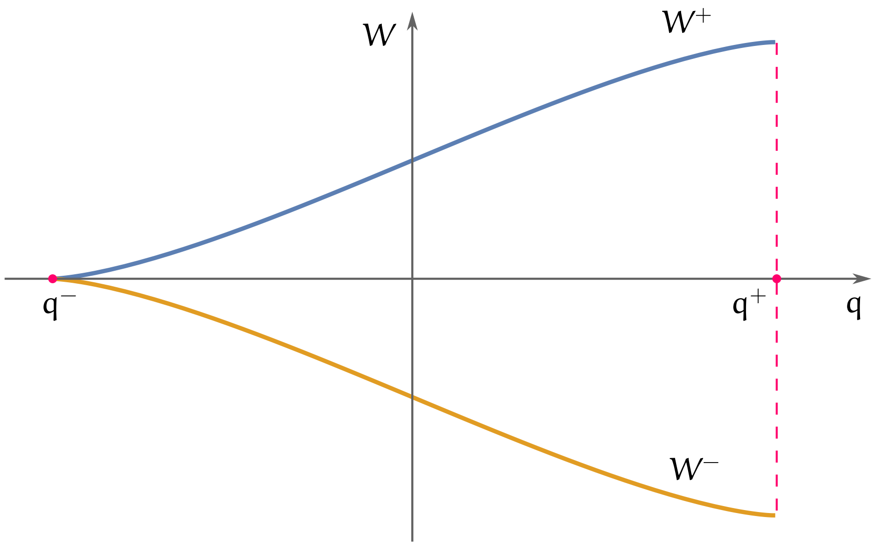
$$\int dx\ \sqrt{1 - x^2} = \int du\ \cos^2 u = \tfrac{1}{2}(u + \cos u\ \sin u) = \tfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}\right). \tag{112}$$

Entonces, usando la identidad $\arcsin x + \frac{1}{2}\pi = \operatorname{arc\,cos}(-x)$,

$$W^{\pm}(q, E) = \pm\left[\frac{E}{\omega}\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\right) + \frac{q}{2}\sqrt{2E - \omega^2 q^2}\right]. \tag{113}$$

No sólo no hay ninguna necesidad de calcular la función W, sino que ahora es considerablemente más complicado calcular su derivada respecto de E. Es mucho más sencillo derivar la expresión (110) bajo el signo de integración y resolver la integral que resolver la integral y derivar. ¿No me creen? Entonces calculen la derivada de la expresión (113) respecto de E. Resumiendo: no tengan prisa en calcular la función W. En general, es contraproducente.

Ya que la calculamos, grafiquémosla para un valor fijo de E.



Por construcción, las dos ramas coinciden en $q = q^-$.

4. Problema 3

Una partícula de masa m se mueve en el plano xy en un campo gravitatorio $\mathbf{g} = -g\hat{y}$. Mediante el método de H–J, encontrar la trayectoria $y(x)$ y las funciones $x(t)$ e $y(t)$.

■ **Solución**. Ya vimos cómo separar el tiempo en la ecuación de H–J cuando el hamiltoniano no depende de t. Este problema muestra cómo separar coordenadas cíclicas e ilustra las particularidades del método de H–J cuando hay más de un grado de liberad. El hamiltoniano es

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + V(y), \tag{114}$$

donde

$$V(y) = mgy. \tag{115}$$

Aquí x es una coordenada cíclica. La ecuación de H–J independiente del tiempo es

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}\right]^2 + \frac{1}{2m}\left[\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}\right]^2 + V(y) = E. \tag{116}$$

Puede proponerse la siguiente separación

$$W(x, y) = \alpha x + \mathcal{W}(y). \tag{117}$$

La constante α tiene una interpretación directa. Cuando $W(x, y)$ sea usada como función generatriz, la ecuación de transformación para p_x será

$$p_x = \frac{\partial W(x,y)}{\partial x} = \alpha. \tag{118}$$

Por lo tanto, $\alpha = p_x$. Esto tiene sentido, porque al ser x una coordenada cíclica su impulso conjugado se conserva. En lo que sigue escribiremos p_x en lugar de α.

Cuando se reemplaza la Ec. (117) en la (116), resulta la siguiente ecuación para $\mathcal{W}(y)$

$$\frac{\mathcal{W}'(y)^2}{2m} = E - \frac{p_x^2}{2m} - V(y). \tag{119}$$

Evidentemente, la solución dependerá de las constantes E y p_x, de modo que habremos encontrado una función W o, mejor dicho, dos funciones W que dependen del número correcto de variables para ser consideradas funciones generatrices,

$$W^{\pm}(x, y, E, p_x) = p_x x + \mathcal{W}^{\pm}(y, E, p_x), \tag{120}$$

donde

$$\mathcal{W}^{\pm}(y, E, p_x) = \pm\sqrt{2m}\int^y dy\,\sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}. \tag{121}$$

Tenemos que elegir el límite inferior de las integrales. En este problema hay un punto de retorno, en donde $p_y = m\dot{y} = 0$. Este punto de retorno, al que notaremos como $y_0(E, p_x)$, satisface la siguiente ecuación:

$$E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy_0(E, p_x) = 0. \tag{122}$$

Hay algo que decir acerca de los puntos de retorno. En este problema parece injustificado no escribir $y_0(E, p_x)$ explícitamente. Todo lo que hemos hecho ha sido decir que satisface cierta ecuación. La ecuación es trivial. Nuestras razones para no escribir $y_0(E, p_x)$ de manera más explícita son retrospectivas: en otros problemas puede ser imposible o sumamente engorroso encontrar expresiones explícitas para los puntos de retorno en términos de funciones elementales. Sin embargo, en la mayoría de los problemas alcanza con saber que los puntos de retorno son soluciones de determinada ecuación. Desde el punto de vista práctico, esto es muy importante. Lo mismo sucedía en los problemas de fuerzas centrales. Más de una vez insistimos en que si se veían obligados a calcular algún punto de retorno era porque no estaban haciendo las cosas de la manera más práctica. Uno puede atravesar toda Mecánica Clásica sin calcular ni un solo punto de retorno.

Volviendo a la Ec. (121), fijado el límite inferior de integración, resulta

$$\mathcal{W}^{\pm}(y, E, p_x) = \pm\sqrt{2m} \int_{y_0(E,p_x)}^{y} dy \, \sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}. \tag{123}$$

Finalmente,

$$W^{\pm}(x, y, E, p_x) = p_x x \pm \sqrt{2m} \int_{y_0(E,p_x)}^{y} dy \, \sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}. \tag{124}$$

No es necesario calcular las funciones W, todo lo que necesitamos son sus derivadas. La ecuación de transformación para las nuevas coordenadas $Q_1^{\pm}$ es

$$Q_1^{\pm} = \frac{\partial W^{\pm}}{\partial E}. \tag{125}$$

Las funciones W dependen de E a través del integrando y a través del límite inferior de integración. Aplicando la regla integral de Leibniz, resulta

$$Q_1^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{y_0(E,p_x)}^{y} \frac{dy}{\sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}} \mp \sqrt{2m}\sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy_0(E, p_x)} \; \frac{\partial y_0(E, p_x)}{\partial E}. \tag{126}$$

La ventaja de haber elegido como extremo inferior de integración el punto de retorno es que el último término es cero, porque, por definición, $y_0(E, p_x)$ es el valor de y que hace nulo el argumento de la raíz cuadrada. Entonces,

$$Q_1^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{y_0(E,p_x)}^{y} \frac{dy}{\sqrt{E - \dfrac{p_x^2}{2m} - mgy}}. \tag{127}$$

En la práctica, cada vez que uno calcula alguna derivada de W, no escribe los términos que vienen de derivar los extremos de integración, sólo para decir luego que esos términos son nulos. Es algo que damos por sabido. A lo sumo, basta con la indicación de que el límite de integración es un punto para el cual se anula el integrando. La integral en la Ec. (127) es inmediata,

$$Q_1^{\pm} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{mg}\sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}. \tag{128}$$

Aquí hemos vuelto a usar la propiedad que define el punto de retorno.

Puede llegarse a la expresión (128) de manera un poco más directa notando que, como el potencial es lineal, derivar la función

$$\sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy} \tag{129}$$

respecto de E es, salvo un constante, equivalente a derivarla respecto de la variable de integración y,

$$\frac{\partial}{\partial E}\sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy} = -\frac{1}{mg}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}. \tag{130}$$

Esto hace que al escribir la ecuación de transformación para Q_1 quede

$$Q_1^{\pm} = \frac{\partial W^{\pm}}{\partial E} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{mg}\int_{y_0(E,p_x)}^{y} dy\, \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}. \tag{131}$$

Pero la integral de la derivada de una función es la propia función. Luego, sin necesidad de calcular ninguna derivada ni de resolver ninguna integral,

$$Q_1^{\pm} = \mp\frac{\sqrt{2m}}{mg}\sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}, \tag{132}$$

que es el mismo resultado que obtuvimos antes. Esta misma estrategia resultará útil en los problemas de la partícula relativista que se mueve en un campo eléctrico uniforme.

A través de la ecuación de transformación llegamos a la expresión (132). Por otro lado, la dinámica de $Q_1^{\pm}$ está dictada por el nuevo hamiltoniano, que es

$$H\big(Q_1^{\pm}, Q_2^{\pm}, E, p_x\big) = E. \tag{133}$$

Entonces,

$$\dot{Q}_1^{\pm} = 1 \quad \Rightarrow \quad Q_1^{\pm}(t) = t - t_0^{\pm}. \tag{134}$$

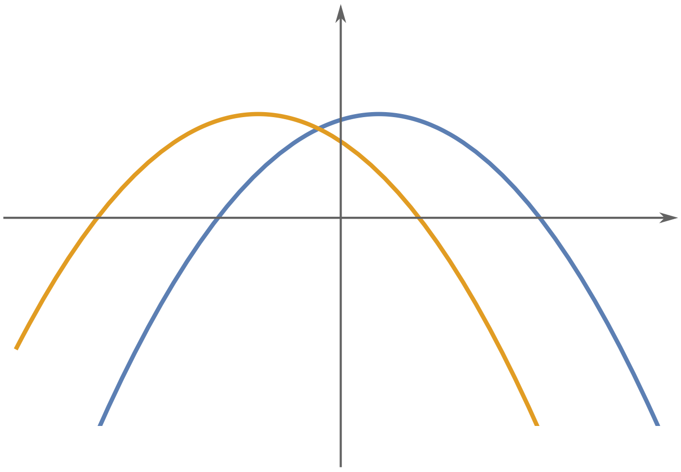
Combinando este resultado con la Ec. (132), obtenemos una ecuación implícita para $y(t)$.

$$t - t_0^{\pm} = \mp \frac{\sqrt{2m}}{mg} \sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}. \tag{135}$$

Esta ecuación es fácilmente invertible,

$$y^{\pm}(t) = \frac{1}{mg}\left(E - \frac{p_x^2}{2m}\right) - \frac{g}{2}\left(t - t_0^{\pm}\right)^2. \tag{136}$$

El gráfico de las dos funciones $y^{\pm}$ es como muestra la figura.



Si la transición entre estas dos funciones tiene que ser suave, entonces deben ser iguales, lo que implica que

$$t_0^{+} = t_0^{-} \equiv t_0. \tag{137}$$

En definitiva, podemos escribir una sola función $y(t)$,

$$y(t) = \frac{1}{mg}\left(E - \frac{p_x^2}{2m}\right) - \frac{g}{2}\left(t - t_0\right)^2. \tag{138}$$

Esto en cuanto a $y(t)$. Para obtener el comportamiento de la coordenada x es necesario escribir la segunda ecuación de transformación. Esto es lo que tiene de particular la aplicación del método de H–J a sistemas con más de un grado de libertad. Recordemos que

$$W^{\pm}(x, y, E, p_x) = p_x x \pm \sqrt{2m} \int_{y_0(E,p_x)}^{y} dy \sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}, \tag{139}$$

luego

$$Q_2^{\pm} = \frac{\partial W^{\pm}}{\partial p_x} = x \pm \sqrt{2m} \int_{y_0(E,p_x)}^{y} dy\, \frac{\partial}{\partial p_x} \sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}. \tag{140}$$

Igual que antes, la contribución que viene de derivar respecto al límite inferior de integración es nula. Podemos usar el mismo truco y reemplazar la derivada respecto de p_x dentro de la integral por una derivada respecto de y,

$$\begin{aligned} Q_2^{\pm} &= x \pm \frac{p_x\sqrt{2m}}{m^2 g}\int_{y_0(E,p_x)}^{y} dy\,\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{E-\frac{p_x^2}{2m}-mgy} \\ &= x \pm \frac{p_x\sqrt{2m}}{m^2 g}\sqrt{E-\frac{p_x^2}{2m}-mgy}. \end{aligned} \tag{141}$$

Reagrupando términos,

$$x - Q_2^{\pm} = \mp\frac{p_x\sqrt{2m}}{m^2 g}\sqrt{E-\frac{p_x^2}{2m}-mgy}. \tag{142}$$

Esta es la expresión que se deduce de la ecuación de transformación. Por otro lado, la dinámica de $Q_2^{\pm}$ es trivial, porque es una coordenada cíclica. Esto nos permite escribir la ecuación de la trayectoria, usando la ecuación anterior para despejar y en términos de x. En esencia, es la misma cuenta de antes, con el lugar de $t - t_0^{\pm}$ ocupado por $x - Q_2^{\pm}$,

$$y^{\pm}(x) = \frac{1}{mg}\left(E-\frac{p_x^2}{2m}\right) - \frac{m^2 g}{2p_x^2}\left(x - Q_2^{\pm}\right)^2. \tag{143}$$

El argumento para justificar que ambas constantes $Q_2^{\pm}$ deben ser iguales sigue las mismas líneas que el que usamos para decir que $t_0^+ = t_0^-$. Definiendo $Q_2^+ = Q_2^- \equiv Q_2$, alcanza con escribir

$$y(x) = \frac{1}{mg}\left(E-\frac{p_x^2}{2m}\right) - \frac{m^2 g}{2p_x^2}\left(x - Q_2\right)^2. \tag{144}$$

La comparación entre las Ecs. (135) y (142) implica que

$$\frac{mg}{\sqrt{2m}}(t - t_0) = \frac{m^2 g}{p_x\sqrt{2m}}(x - Q_2), \tag{145}$$

es decir,

$$x(t) = Q_2 + \frac{p_x}{m}(t - t_0). \tag{146}$$

En resumen, hemos obtenido $x(t)$, $y(t)$ e $y(x)$. De la solución participan cuatro constantes, E, p_x, t_0 y Q_2. Esas cuatro constantes pueden usarse para fijar las condiciones iniciales.

Insistimos con lo siguiente: en ningún momento fue necesario escribir *W* explícitamente. Fue suficiente con su expresión integral. Lo que importan son las derivadas de *W*. Esas derivadas se calculan más fácilmente derivando la expresión integral y entonces integrando, que integrando primero y derivando después. Pero no me crean a mí, sigan los dos caminos y comparen. Tienen también el problema del oscilador armónico para hacer esto.

5. Problema 3 revisitado

En el método de H–J, el asunto principal es encontrar una solución de la ecuación

$$\frac{\partial S(\mathbf{q},t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S(\mathbf{q},t)}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0 \tag{147}$$

que dependa del número correcto de parámetros adicionales $\boldsymbol{\alpha}$. La solución así hallada es una función no solo de $\mathbf{q}$ y t, sino también de esos parámetros,

$$S = S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t). \tag{148}$$

Aunque parezca un poco redundante decirlo, esta función satisface la ecuación

$$\frac{\partial S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0. \tag{149}$$

Supongamos que las ecuaciones

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}) \tag{150}$$

definan un cambio de variables uno a uno, es decir, que existe la transformación inversa,

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\beta}). \tag{151}$$

Entonces podemos definir una nueva función $\tilde{S}$ mediante el simple cambio de variables

$$\tilde{S}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}, t) = S\big(\mathbf{q}, \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\beta}), t\big)\,. \tag{152}$$

Consideremos el ejemplo mundano de una función $f = f(x, y)$. Las ecuaciones

$$u = \tfrac{1}{2}(x + y), \qquad v = \tfrac{1}{2}(x - y), \tag{153}$$

cuyas inversas son

$$x = u + v, \qquad y = u - v, \tag{154}$$

determinan una relación uno a uno entre el par de variables (x, y) y el par de variables (u, v). Podemos definir la función

$$g(u, v) = f\big(x(u, v), y(u, v)\big) = f(u + v, u - v). \tag{155}$$

Si la función f es, por ejemplo,

$$f(x, y) = \tfrac{1}{2}(x + y), \tag{156}$$

la función g será

$$g(u, v) = u. \tag{157}$$

En algún sentido, la función g es más simple que la función f. De modo que estos cambios de variables pueden permitir escribir una función complicada en las variables originales como una función más simple en las nuevas variables. Pero este no es el único motivo para introducir cambios de variables. Más adelante veremos las variables de ángulo-acción, en donde lo que se busca no es necesariamente simplificar una función.

Volvamos a la función $\tilde{S}$ definida por la Ec. (152). Si sustituimos S por $\tilde{S}$ en el primer miembro de la Ec. (149), obtenemos

$$\frac{\partial \tilde{S}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}, t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial \tilde{S}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}, t)}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = \frac{\partial S\big(\mathbf{q}, \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\beta}), t\big)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S\big(\mathbf{q}, \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\beta}), t\big)}{\partial \mathbf{q}}, t\right). \tag{158}$$

Pero en la Ec. (149) es irrelevante qué cosa ocupa el lugar de las variables $\boldsymbol{\alpha}$. De modo que

$$\frac{\partial \tilde{S}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}, t)}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial \tilde{S}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}, t)}{\partial \mathbf{q}}, t\right) = 0. \tag{159}$$

Luego, la función $\tilde{S}$ puede también considerarse una función generatriz de tipo F_2 que conduce al hamiltoniano nulo,

$$\tilde{F}_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = \tilde{S}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t). \tag{160}$$

¿Cuál es el punto de todo esto? El punto es que esto permite cierta libertad en la elección de los nuevos impulsos como funciones de las constantes de integración $\boldsymbol{\alpha}$. En general, al resolver la ecuación de H–J, las constantes de integración tienen un significado físico. Son, por ejemplo, la energía, una componente del momento angular, una componente del impulso, etc. En la función $\tilde{S}$, los nuevos impulsos son funciones de esas constantes,

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{161}$$

Lo que hemos dicho sobre S podemos decirlo sobre W. Si al resolver la ecuación de H–J independiente del tiempo encontramos una solución

$$W = W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{162}$$

y definimos un cambio de variables como el anterior, la nueva función

$$\tilde{W}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta}) = W\big(\mathbf{q}, \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\beta})\big) \tag{163}$$

también será solución de la ecuación de H–J independiente del tiempo, pero con una diferencia. En el miembro derecho de la ecuación lo que va a aparecer no es E, sino $E(\boldsymbol{\beta})$,

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial \tilde{W}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\beta})}{\partial \mathbf{q}}\right) = E(\boldsymbol{\beta}). \tag{164}$$

El nuevo hamiltoniano será, entonces,

$$H\big(\tilde{\mathbf{Q}}, \boldsymbol{\beta}\big) = E(\boldsymbol{\beta}). \tag{165}$$

De modo que ahora no sucederá necesariamente que todas las coordenadas $\tilde{Q}_i$ salvo la primera sean constantes. Ahora todas las $\tilde{Q}_i$ pueden depender del tiempo, pero de una manera que no deja de ser trivial,

$$\dot{\tilde{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial E(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}. \tag{166}$$

Puesto que los nuevos impulsos $\boldsymbol{\beta}$ son constantes, el miembro de la derecha en la ecuación anterior es constante. Las nuevas coordenadas son funciones lineales del tiempo,

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \frac{\partial E(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} t + \mathbf{Q}_0. \tag{167}$$

Veamos cómo funciona esto usando como ejemplo el problema 3. Allí encontramos que las funciones $W^{\pm}$ eran

$$W^{\pm}(x, y, E, p_x) = p_x x \pm \sqrt{2m} \int_{y_0(E,p_x)}^{y} dy \, \sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}, \tag{168}$$

donde la ecuación que define el límite inferior de integración es

$$E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy_0(E, p_x) = 0. \tag{169}$$

Estas expresiones resultarán más simples si introducimos el cambio de variables

$$E_y = E - \frac{p_x^2}{2m}, \tag{170}$$

cuya inversa es

$$E = E_y + \frac{p_x^2}{2m}. \tag{171}$$

Entonces definimos

$$\tilde{W}^{\pm}(x, y, E_y, p_x) = W^{\pm}\left(x, y, E_y + \frac{p^2}{2m}, p_x\right) = p_x x \pm \sqrt{2m} \int_{y_0(E_y)}^{y} dy \, \sqrt{E_y - mgy}, \tag{172}$$

donde ahora el extremo inferior de integración es considerado como una función de E_y que satisface la siguiente ecuación:

$$E_y - mgy_0(E_y) = 0. \tag{173}$$

Las ecuaciones de transformación para estas funciones $\tilde{W}^{\pm}$ son más sencillas que las de

$W^{\pm}$, porque ahora p_x no aparece dentro de la integral. Tendremos

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_1^{\pm} &= \frac{\partial \tilde{W}^{\pm}}{\partial E_y} = \mp \frac{\sqrt{2m}}{mg}\sqrt{E_y - mgy}, \\ \tilde{Q}_2^{\pm} &= \frac{\partial \tilde{W}^{\pm}}{\partial p_x} = x. \end{aligned} \tag{174}$$

Compárese con las Ecs. (132) y (142),

$$\begin{aligned} Q_1^{\pm} &= \mp \frac{\sqrt{2m}}{mg}\sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}, \\ Q_2^{\pm} &= x \pm \frac{p_x\sqrt{2m}}{m^2 g}\sqrt{E - \frac{p_x^2}{2m} - mgy}. \end{aligned} \tag{175}$$

No se gana mucho con la primera Ec. (174), pero la segunda es más notablemente simple que la segunda Ec. (175)

Por otro lado, el nuevo hamiltoniano es

$$H\left(\tilde{Q}_1^{\pm}, \tilde{Q}_2^{\pm}, E_y, p_x\right) = E(E_y, p_x) = E_y + \frac{p_x^2}{2m}. \tag{176}$$

Por lo tanto,

$$\dot{\tilde{Q}}_1^{\pm} = 1, \qquad \dot{\tilde{Q}}_2^{\pm} = \frac{p_x}{m}, \tag{177}$$

lo que implica

$$\tilde{Q}_1^{\pm}(t) = t - t_1^{\pm}, \qquad \tilde{Q}_2^{\pm}(t) = \frac{p_x}{m}t - \tilde{Q}^{\pm}. \tag{178}$$

Reemplazando en las Ecs. (174), queda

$$\begin{aligned} t - t_1^{\pm} &= \mp \frac{\sqrt{2m}}{mg}\sqrt{E_y - mgy}, \\ \frac{p_x}{m}t - \tilde{Q}^{\pm} &= x. \end{aligned} \tag{179}$$

Los mismos argumentos de continuidad y diferenciabilidad permiten concluir que $t_1^+ = t_1^- = t_0$ y que $Q^+ = Q^- = Q$. Finalmente,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{E_y}{mg} - \frac{g}{2}(t - t_0)^2, \\ x(t) &= \frac{p_x}{m}t - Q. \end{aligned} \tag{180}$$

Estas soluciones son equivalentes a las de la sección anterior. Otra vez aparecen cuatro constantes, E_y, p_x, t_0 y Q, que permiten fijar las condiciones iniciales.