Mecánica Clásica – 1er. cuatrimestre de 2023

Guía 8: *Variables de ángulo-acción. Episodio II.*[*]

1. Las variables de ángulo-acción cuando hay más de un grado de libertad

Para sistemas conservativos con más de un grado de libertad, definiremos las variables de ángulo-acción cuando la ecuación de H–J sea completamente separable y las órbitas en cada plano de fase sean cerradas (dejamos de lado el caso de las rotaciones). Que la ecuación de H–J sea separable significa que su solución puede escribirse como una suma de funciones que dependen de cada coordenada por separado. Si hay n grados de libertad,

$$W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}), \tag{1}$$

donde, convencionalmente, $\alpha_1 = E$. Que las órbitas en cada plano de fase sean cerradas quiere decir que las ecuaciones

$$p_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial W_i(q_i, \boldsymbol{\alpha})}{\partial q_i} \tag{2}$$

definen órbitas cerradas en el plano $q_i p_i$. En la práctica, las funciones W_i son multivaluadas, de otro modo sería imposible que la ecuación anterior definiera una órbita cerrada, porque para cada valor de q_i deben corresponder, al menos, dos valores de p_i.

Por analogía con los sistemas de un solo grado de libertad, se definen las variables de acción

$$J_i(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \oint p_i(q_i, \boldsymbol{\alpha}) dq_i. \tag{3}$$

Invirtiendo estas relaciones, se obtiene

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{J}), \tag{4}$$

y se define la función

$$\mathcal{W}(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = W\big(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{J})\big). \tag{5}$$

Al igual que W, la función $\mathcal{W}$ es una suma de funciones que dependen separadamente de cada coordenada q_i,

$$\mathcal{W}(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{W}_i(q_i, \mathbf{J}) = \sum_{i=1}^{n} W_i\big(q_i, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{J})\big). \tag{6}$$

[*]zanellaj@df.uba.ar

Puesto que la función W satisface la ecuación

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{q}}\right) = \alpha_1 = E, \tag{7}$$

considerada como función generatriz de tipo F_2, la función W lleva al hamiltoniano

$$H(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1 = E. \tag{8}$$

A partir de la Ec. (5), vemos que la función $\mathcal{W}$ satisface esta otra ecuación

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{q}, \mathbf{J})}{\partial \mathbf{q}}\right) = H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W\big(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{J})\big)}{\partial \mathbf{q}}\right) = \alpha_1(\mathbf{J}) = E(\mathbf{J}), \tag{9}$$

y, por lo tanto, conduce al nuevo hamiltoniano

$$H(\mathbf{J}) = E(\mathbf{J}). \tag{10}$$

Las coordenadas conjugadas de los nuevos impulsos $\mathbf{J}$ son las variables ángulo,

$$\theta(\mathbf{q}, \mathbf{J}) = \frac{\partial \mathcal{W}(\mathbf{q}, \mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}} = \frac{\partial W\big(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{J})\big)}{\partial \mathbf{J}} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\big(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{J})\big) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}}. \tag{11}$$

Más inmediato es escribirlas en términos de los impulsos $\boldsymbol{\alpha}$ y de las coordenadas $\mathbf{Q}$ que corresponden a la función W,

$$\theta(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial W\big(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}\big)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}\big(\mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha})\big)}{\partial \mathbf{J}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) \cdot \left[\frac{\partial \mathbf{J}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\right]^{-1}. \tag{12}$$

Las ecuaciones de movimiento para estas variables son

$$\dot{\theta}_i = \frac{\partial H(\mathbf{J})}{\partial J_i} \equiv \omega_i(\mathbf{J}), \tag{13}$$

o, definiendo el vector $\boldsymbol{\omega}$,

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial H(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{J}} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J}). \tag{14}$$

Debido a que las variables $\mathbf{J}$ son constantes,

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}_0 + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{J})t. \tag{15}$$

Las funciones $\omega_i(\mathbf{J})$ son las frecuencias angulares o, más simplemente, las frecuencias del sistema. Aunque uno no debe suponer que, porque se hable de frecuencias, el movimiento del sistema sea necesariamente periódico. Eso sólo es cierto para sistemas con un solo grado de libertad.

Llamar a las funciones $\omega_i(\mathbf{J})$ frecuencias y no velocidades está relacionado con la siguiente propiedad. Hemos visto que para sistemas con un solo grado de libertad, la variación de la variable ángulo cuando el sistema recorre una órbita es igual a 2π. Existe un resultado análogo para sistemas con más de un grado de libertad. Cuando se recorren las órbitas en los planos $q_i p_i$, la variación de las variables ángulo es

$$d\theta_k(\mathbf{q},\mathbf{J}) = \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{W}(\mathbf{q},\mathbf{J})}{\partial q_i \partial J_k} dq_i = \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{W}_i(q_i,\mathbf{J})}{\partial q_i \partial J_k} dq_i. \tag{16}$$

Supongamos que sobre cada plano $q_i p_i$ se completen m_i ciclos. La variación de θ_k será

$$\Delta\theta_k = \sum_i \oint_{m_i} dq_i \, \frac{\partial^2 \mathcal{W}_i(q_i,\mathbf{J})}{\partial q_i \partial J_k} = \sum_i \oint_{m_i} dq_i \, \frac{\partial p_i(q_i,\mathbf{J})}{\partial J_k}. \tag{17}$$

El subíndice en las integrales indica el número de ciclos completos que se recorren en cada plano. Intercambiando el orden de las operaciones,

$$\Delta\theta_k = \frac{\partial}{\partial J_k} \sum_i \oint_{m_i} dq_i \; p_i(q_i,\mathbf{J}) = \sum_i 2\pi m_i \frac{\partial J_i}{\partial J_k} = 2\pi m_k. \tag{18}$$

Daría la impresión de que este resultado sólo depende de que se recorran m_k ciclos en el plano $q_k p_k$, sin importar lo que pase en los otros planos. Sin embargo, no es así. La conclusión anterior depende de que se recorran un número entero de ciclos en cada plano, no sólo en el plano $q_k p_k$. De otra forma no podríamos decir que cada una de las integrales es $m_i J_i$, lo que es fundamental para arribar a la conclusión.

Las consecuencias del resultado anterior son profundas, pero van más allá del objetivo de estas notas. Ahí está el origen de que las velocidades $\omega_i(\mathbf{J})$ sean llamadas frecuencias. Vean la sección 10–7 de la 3ra. edición del libro de Goldstein. En el libro de Landau y Lifshitz, la sección 50 de la 2da. edición en español o la 52 de la 3ra. edición en inglés.

2. Problema 14

Eligiendo convenientemente las unidades, el lagrangiano de un sistema es

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{4}\left(q_1^2 + q_2^2\right)\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right) + \frac{2}{q_1^2 + q_2^2}. \tag{19}$$

a) Escribir la ecuación de H–J independiente del tiempo y mostrar que es separable.
b) Asumiendo que $E < 0$, graficar los retratos de fase en los planos $q_1 p_1$ y $q_2 p_2$.
c) Siempre en el caso $E < 0$, encontrar la ecuación de la trayectoria, $f(q_1, q_2) = 0$, y la ecuación que determina la evolución temporal, $g(q_1, q_2, t) = 0$.
d) Calcular las variables de acción J_1 y J_2 y escribir el hamiltoniano como función de estas variables, $H = H(J_1, J_2)$.
e) Calcular las frecuencias angulares de las variables ángulo. Sólo con esa información, ¿qué puede concluirse acerca del movimiento del sistema?
f) Calcular las variables ángulo.
g) Hemos visto en otras guías y con otras coordenadas un sistema físico al que corresponde este lagrangiano. ¿De qué sistema se trata?

■ **Solución**. El hamiltoniano se escribe inmediatamente,

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \frac{p_1^2+p_2^2}{q_1^2+q_2^2} - \frac{2}{q_1^2+q_2^2}. \tag{20}$$

En general, la ecuación de H–J independiente del tiempo es

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = E. \tag{21}$$

En este caso en particular, queda

$$\frac{1}{q_1^2+q_2^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 - 2\right] = E. \tag{22}$$

Para mostrar que el sistema es separable, escribimos

$$W(q_1,q_2) = W_1(q_1) + W_2(q_2) \tag{23}$$

y usamos la notación abreviada

$$p_i(q_i) = \frac{\partial W_i(q_i)}{\partial q_i}. \tag{24}$$

Las impulsos p_i y las derivadas de las funciones W_i son intercambiables. Luego,

$$\frac{1}{q_1^2+q_2^2}\left(p_1^2+p_2^2-2\right) = E. \tag{25}$$

Multiplicando por $q_1^2+q_2^2$ y agrupando términos,

$$\left(p_1^2 - Eq_1^2 - 1\right) + \left(p_2^2 - Eq_2^2 - 1\right) = 0. \tag{26}$$

Hemos distribuido el factor 2 simétricamente entre ambos términos. Cualquier otra elección es válida. Lo importante es notar que el hecho de que una función de q_1 sumada a una función de q_2 dé como resultado cero significa que cada función debe ser una constante, digamos, α y $-\alpha$, para que su suma sea cero:

$$\begin{aligned} p_1^2 - Eq_1^2 - 1 &= \alpha, \\ p_2^2 - Eq_2^2 - 1 &= -\alpha, \end{aligned} \tag{27}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} p_1^2 - Eq_1^2 &= 1+\alpha, \\ p_2^2 - Eq_2^2 &= 1-\alpha. \end{aligned} \tag{28}$$

Estas ecuaciones pueden leerse de dos maneras: primero, escribiendo p_1 y p_2 en términos de las derivadas de W_1 y W_2, las Ecs. (28) son las ecuaciones diferenciales que determinan estas funciones. En segundo lugar, las Ecs. (28) pueden leerse directamente como las ecuaciones que definen las órbitas en cada plano del espacio de fase. Además, a través de este proceso de separación de variables obtenemos una nueva constante de movimiento: la constante de separación α. A partir de cualquiera de las ecuaciones anteriores, escribiendo explícitamente E en términos de $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$, encontramos que

$$\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{(p_1 q_2)^2 - (p_2 q_1)^2 + q_1^2 - q_2^2}{q_1^2 + q_2^2}. \tag{29}$$

Esta constante no tiene nada de trivial y la hemos obtenido con muy poco esfuerzo.

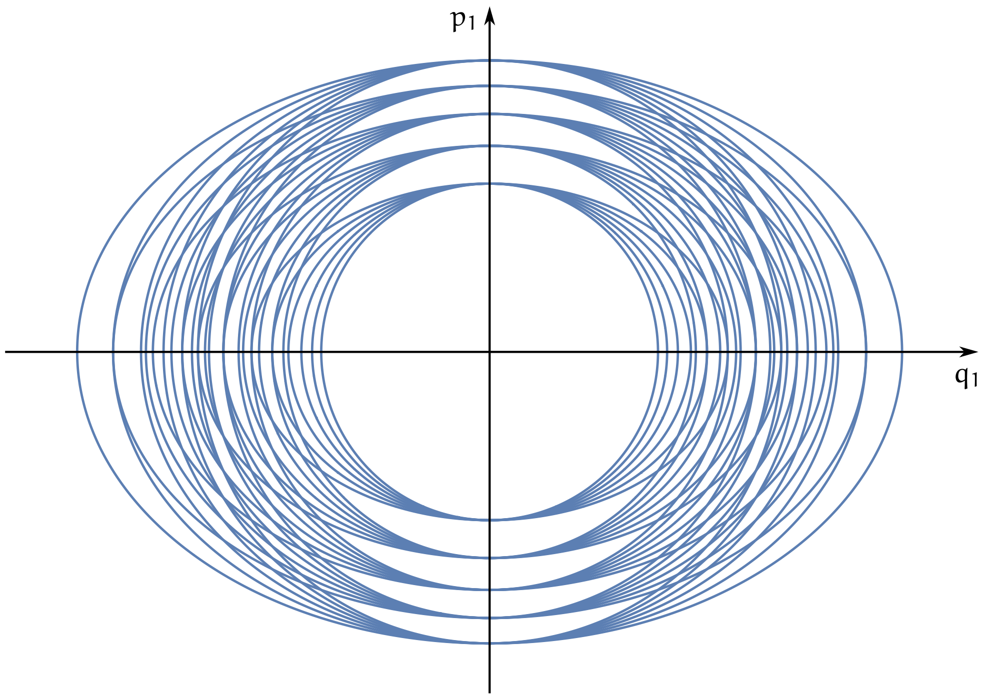
En principio, hay una variedad de retratos de fase posibles correspondientes a las Ecs. (28). El problema pide analizar el caso en que $E < 0$. Definamos $\mathcal{E} = -E$, de modo que

$$\begin{aligned} p_1^2 + \mathcal{E} q_1^2 &= 1 + \alpha, \\ p_2^2 + \mathcal{E} q_2^2 &= 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{30}$$

Evidentemente, los retratos de fase en cada plano son elipses. Nótese la diferencia con la ecuación análoga para el oscilador armónico

$$p^2 + \omega^2 q^2 = 2E. \tag{31}$$

La diferencia fundamental, sin embargo, es que las familias de curvas definidas por las Ecs. (30) dependen de dos parámetros. Las trayectorias en cada plano pueden intersectarse y, de hecho, cubren densamente toda la región $|p_i| < \sqrt{2}$. Si las graficamos sólo para unos pocos pares de valores de $\mathcal{E}$ y α obtenemos un retrato como el que muestra la figura.



El sentido de circulación es el horario.

Entendidas como ecuaciones diferenciales, el par de ecuaciones (30) se leen como

$$\begin{aligned} W_1'(q_1)^2 + \mathcal{E} q_1^2 &= 1 + \alpha, \\ W_2'(q_2)^2 + \mathcal{E} q_2^2 &= 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{32}$$

Al resolver estas ecuaciones, las funciones W_1 y W_2 serán efectivamente funciones no sólo de q_1 y q_2, sino también de E y α. Así, también la función W será una función de $\mathbf{q}$, E y α,

$$W^{rs}(\mathbf{q}, E, \alpha) = W_1^r(q_1, E, \alpha) + W_2^s(q_2, E, \alpha), \tag{33}$$

donde

$$\begin{aligned} W_1^r(q_1, E, \alpha) &= r \int_{-q_{10}}^{q_1} dx\, \sqrt{1 + \alpha - \mathcal{E} x^2}, \\ W_2^s(q_2, E, \alpha) &= s \int_{-q_{20}}^{q_2} dx\, \sqrt{1 - \alpha - \mathcal{E} x^2}, \end{aligned} \tag{34}$$

con

$$r = \text{signo}(p_1), \qquad s = \text{signo}(p_2). \tag{35}$$

Hemos elegido como extremos inferiores de integración los puntos de retorno $-q_{10}$ y $-q_{20}$, ambos a la izquierda del origen, y determinados por las ecuaciones

$$1 + \alpha - \mathcal{E} q_{10}^2 = 0, \qquad 1 - \alpha - \mathcal{E} q_{20}^2 = 0. \tag{36}$$

Los puntos de retorno q_{i0} son funciones de E y α. Aquí omitimos indicar esa dependencia explícitamente. Cada función W_i^r tiene dos ramas, de acuerdo al signo de p_i. La función W^{rs} tendrá cuatro ramas, W^{++}, W^{+-}, W^{-+} y W^{--}.

Los nuevos impulsos son E y α. La función W^{rs} conduce al hamiltoniano $H(E) = E$. La ecuación de transformación que define las coordenadas Q_1^{rs}, conjugadas de E, es

$$Q_1^{rs} = \frac{\partial W^{rs}}{\partial E}. \tag{37}$$

Explícitamente, teniendo en cuenta que $\mathcal{E} = -E$,

$$Q_1^{rs} = \frac{\partial W_1^r}{\partial E} + \frac{\partial W_2^s}{\partial E} = \frac{r}{2} \int_{-q_{10}}^{q_1} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + \alpha - \mathcal{E} x^2}} + \frac{s}{2} \int_{-q_{20}}^{q_2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - \alpha - \mathcal{E} x^2}}. \tag{38}$$

La dependencia de los límites de integración respecto de E no tiene ningún efecto, porque en los límites inferiores el argumento de cada raíz es nulo. Tenemos que resolver la integral

$$I(y) = \int_{-1}^{y} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{39}$$

Empleando la sustitución $x = \sin u$, queda

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int du \ \sin^2 u = \frac{u - \sin u \ \cos u}{2} = \frac{\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}}{2}, \tag{40}$$

de modo que

$$I(y) = \frac{1}{2}\Big(\arcsin y + \frac{\pi}{2} - y\sqrt{1-y^2}\Big) = \frac{1}{2}\left[\arccos(-y) - y\sqrt{1-y^2}\right]. \tag{41}$$

En definitiva, resulta

$$\begin{aligned} Q_1^{rs} = \frac{1}{4\mathcal{E}^{3/2}} \Bigg\{ r \left[(1+\alpha) \arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1+\alpha}}\, q_1 \right) - q_1\sqrt{1+\alpha-\mathcal{E}q_1^2}\, \sqrt{\mathcal{E}} \right] \\ + s \left[(1-\alpha) \arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1-\alpha}}\, q_2 \right) - q_2\sqrt{1-\alpha-\mathcal{E}q_2^2}\, \sqrt{\mathcal{E}} \right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{42}$$

Usando las Ecs. (30), podemos darle un aspecto más compacto,

$$\begin{aligned} Q_1^{rs} = \frac{1}{4\mathcal{E}^{3/2}} \Bigg[r(1+\alpha) \arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1+\alpha}}\, q_1 \right) + s(1-\alpha) \arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1-\alpha}}\, q_2 \right) \\ - \sqrt{\mathcal{E}}\, (p_1 q_1 + q_2 p_2) \Bigg]. \end{aligned} \tag{43}$$

Esto es lo que dice la ecuación de transformación. Por otro lado, la dinámica de Q_1^{rs} está dictada por el nuevo hamiltoniano, $H(E) = E$, donde E es justamente el impulso conjugado de Q_1^{rs}. Entonces,

$$\dot{Q}_1^{rs} = \frac{\partial H}{\partial E} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad Q_1^{rs} = t - t_0^{rs}, \tag{44}$$

donde t_0^{rs} son constantes de integración. Volviendo a la Ec. (42),

$$\begin{aligned} 4\mathcal{E}^{3/2}(t - t_0^{rs}) = r \left[(1+\alpha) \arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1+\alpha}}\, q_1 \right) - q_1\sqrt{1+\alpha-\mathcal{E}q_1^2}\, \sqrt{\mathcal{E}} \right] \\ + s \left[(1-\alpha) \arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1-\alpha}}\, q_2 \right) - q_2\sqrt{1-\alpha-\mathcal{E}q_2^2}\, \sqrt{\mathcal{E}} \right]. \end{aligned} \tag{45}$$

Esto conduce a la ecuación buscada, una relación entre q_1, q_2 y el tiempo,

$$g^{rs}(q_1, q_2, t) = 0. \tag{46}$$

El paso siguiente es escribir la ecuación de transformación para la coordenada Q_2,

$$Q_2^{rs} = \frac{\partial W^{rs}}{\partial \alpha} = \frac{r}{2} \int_{-q_{10}}^{q_1} \frac{dx}{\sqrt{1+\alpha-\mathcal{E}x^2}} - \frac{s}{2} \int_{-q_{20}}^{q_2} \frac{dx}{\sqrt{1-\alpha-\mathcal{E}x^2}}. \tag{47}$$

Aquí hay que usar la siguiente primitiva

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x. \tag{48}$$

Al evaluar las integrales definidas, ocurren las simplificaciones usuales, debido a que el límite inferior de las integrales es un punto de retorno. El resultado es

$$Q_2^{rs} = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}}}\left[r \arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1+\alpha}}\, q_1\right) - s \arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1-\alpha}}\, q_2\right)\right]. \tag{49}$$

Esto en cuanto a la ecuación de transformación. Por otro lado, la dinámica de Q_2^{rs} es trivial, porque el nuevo hamiltoniano no depende de su impulso conjugado. Esto implica que Q_2^{rs} es una constante o, mejor dicho, cuatro constantes. Definiendo

$$2\sqrt{\mathcal{E}}\, Q_2^{rs} = \beta^{rs}, \tag{50}$$

la Ec. (49) define la trayectoria en el plano $q_1 q_2$,

$$\beta^{rs} = r \arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1+\alpha}}\, q_1\right) - s \arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1-\alpha}}\, q_2\right). \tag{51}$$

Esta ecuación conduce inmediatamente a la forma buscada,

$$f^{rs}(q_1, q_2) = 0. \tag{52}$$

Tomando el coseno de ambos miembros de la Ec. (51), resulta

$$\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\mathcal{E}} \cos\beta^{rs} = q_1 q_2 + rs\sqrt{\frac{1+\alpha}{\mathcal{E}} - q_1^2}\,\sqrt{\frac{1-\alpha}{\mathcal{E}} - q_2^2}. \tag{53}$$

Pasando términos de un lado al otro de la ecuación y elevando al cuadrado, queda

$$(1-\alpha)q_1^2 + (1+\alpha)q_2^2 - 2\sqrt{1-\alpha^2}\, \cos\beta^{rs}\, q_1 q_2 = \frac{1-\alpha^2}{\mathcal{E}} \sin^2\beta^{rs}. \tag{54}$$

Puesto que el discriminante de esta cuadrática es

$$(1-\alpha^2)\cos^2\beta^{rs} - (1-\alpha)(1+\alpha) = -(1-\alpha^2)\sin^2\beta^{rs} < 0, \tag{55}$$

la Ec. (54) representa cuatro arcos de elipse en el plano $q_1 q_2$. El paso de un arco a otro debe ser continuo y diferenciable. Esto implica que las constantes β^{rs} son iguales, salvo transformaciones irrelevantes. Así, la órbita completa en el plano $q_1 q_2$ es una elipse. Lo fundamental no es tanto que sea una elipse como que sea una órbita cerrada. Debido a que, fijadas E y α, los impulsos son funciones de las coordenadas, las órbitas en el espacio de fase son cerradas y, por lo tanto, periódicas.

Pasemos ahora al cálculo de las variables de ángulo-acción. Calcular las variables de acción es sencillo, porque las trayectorias en cada plano del espacio de fase son elipses,

$$\begin{aligned} p_1^2 + \mathcal{E} q_1^2 &= 1 + \alpha, \\ p_2^2 + \mathcal{E} q_2^2 &= 1 - \alpha. \end{aligned} \tag{56}$$

Tenemos entonces

$$J_1 = \frac{1+\alpha}{2\sqrt{\mathcal{E}}}, \qquad J_2 = \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\mathcal{E}}}. \tag{57}$$

En términos de las variables de acción, el nuevo hamiltoniano es

$$H(J_1, J_2) = E(J_1, J_2) = -\frac{1}{(J_1 + J_2)^2}. \tag{58}$$

La derivada de H respecto cada variable de acción da la frecuencia angular de la variable ángulo correspondiente. Puesto que $H(J_1, J_2)$ es una función de $J_1 + J_2$, esas frecuencias serán iguales,

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2}{(J_1 + J_2)^3} = 2\mathcal{E}^{3/2}. \tag{59}$$

Cuando las frecuencias de un sistema satisfacen una ecuación lineal homogénea con coeficientes enteros, como en este caso, el movimiento es periódico. Por lo tanto, basándonos únicamente en esta información, podemos decir que la trayectoria en el plano $q_1 q_2$ será cerrada, algo que ya habíamos demostrado con bastante más trabajo.

Las variables ángulo, como funciones de E y α, se obtienen aplicando el resultado (12),

$$\theta_i^{rs} = \frac{\partial W^{rs}}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial J_i} + \frac{\partial W^{rs}}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial J_i} = Q_1^{rs}\frac{\partial E}{\partial J_i} + Q_2^{rs}\frac{\partial \alpha}{\partial J_i}. \tag{60}$$

Además de la Ec. (58), necesitaremos esta otra relación

$$\alpha(J_1, J_2) = \frac{J_1 - J_2}{J_1 + J_2}. \tag{61}$$

Convendrá dejar escrito todo en términos de $\mathcal{E}$ y α, que son las constantes que están definidas directamente en función de $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial J_1} &= \frac{\partial E}{\partial J_2} = 2\mathcal{E}^{3/2}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial J_1} &= \frac{2J_2}{(J_1 + J_2)^2} = (1-\alpha)\sqrt{\mathcal{E}}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial J_2} &= -\frac{2J_1}{(J_1 + J_2)^2} = -(1+\alpha)\sqrt{\mathcal{E}}. \end{aligned} \tag{62}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\theta_1(\mathbf{q},\mathbf{p}) &= \mathrm{signo}(p_1)\arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1+\alpha}}\,q_1\right) - \frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{2}(q_1p_1+q_2p_2),\\ \theta_2(\mathbf{q},\mathbf{p}) &= \mathrm{signo}(p_2)\arccos\left(-\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{1-\alpha}}\,q_2\right) - \frac{\sqrt{\mathcal{E}}}{2}(q_1p_1+q_2p_2).\end{aligned} \tag{63}$$

Aquí debemos entender que

$$\mathcal{E} = -\frac{p_1^2+p_2^2-2}{q_1^2+q_2^2}, \tag{64}$$

y que, tal como se obtiene a partir de cualquiera de las Ecs. (56),

$$\alpha = \frac{(p_1q_2)^2-(p_2q_1)^2+q_1^2-q_2^2}{q_1^2+q_2^2}. \tag{65}$$

En el último ítem del problema se pide identificar un sistema cuya dinámica esté descripta por el lagrangiano (19). Busquen las soluciones más sencillas. Es un sistema con dos grados de libertad, de modo que lo más simple sería que se tratase de una partícula en el plano. Traten de encontrar la transformación de coordenadas que lleva de

$$L(x,y,\dot{x},\dot{y}) = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right) - V(x,y) \tag{66}$$

al lagrangiano (19). Una vez que identifiquen el sistema, fíjense qué cosa es la constante α.