

## Mecánica Clásica – primer cuatrimestre de 2023 – primer recuperatorio: 20/7

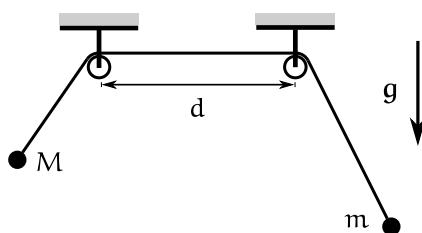
Por favor resuelva en hojas separadas y justifique todas sus respuestas

1. Dos partículas, de masas  $m$  y  $M$ , están unidas por un hilo de longitud  $l$ . El hilo pasa por dos poleas de radio despreciable, como muestra la figura. Las partículas pueden moverse en el plano de la figura. Hay gravedad,  $\mathbf{g} = -g\hat{x}$ . Defina coordenadas generalizadas. Escriba el lagrangiano del sistema y las ecuaciones de Euler-Lagrange.
2. Una partícula de masa  $m$  se mueve sobre la superficie definida en coordenadas esféricas por la ecuación  $\theta = \alpha$ , tal que  $\sin^2 \alpha = \lambda$ . La partícula se mueve bajo la acción del potencial central

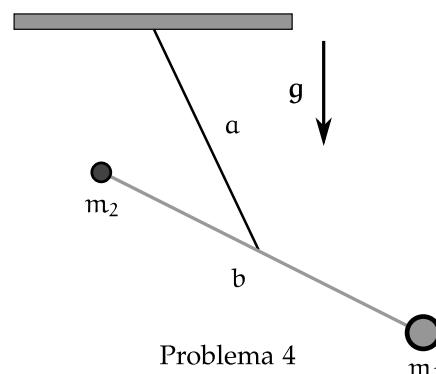
$$V(r) = -\frac{k}{r}, \quad k > 0.$$

La componente  $z$  del momento angular es dato.

- a) Escriba el lagrangiano del sistema, reduzca el problema a un problema unidimensional para la coordenada  $r$  y grafique el potencial efectivo.
  - b) Si la energía de la partícula es  $E < 0$ , encuentre  $r(\varphi)$  asumiendo que para  $\varphi = 0$  la coordenada  $r$  toma su valor mínimo. ¿Bajo qué condiciones la órbita es cerrada?
3. Una partícula de masa  $m$  se mueve en el plano  $xy$  bajo la acción del potencial  $V(x, y) = mgy$ .
    - a) Escriba el lagrangiano usando las coordenadas cartesianas.
    - b) Hay dos simetrías del lagrangiano que son evidentes. ¿Cuáles son estas simetrías y qué constantes de movimiento tienen asociadas?
    - c) Muestre que la transformación  $x' = x + \epsilon y$ ,  $y' = y + \epsilon x$  es una cuasisimetría del lagrangiano y dé la constante de movimiento asociada.
  4. Un péndulo está formado por dos barras de longitudes  $a$  y  $b$  como muestra la figura. La barra de longitud  $a$  tiene un extremo fijo, alrededor del cual puede rotar en el plano de la figura. La segunda barra está unida a la primera por su punto medio y puede rotar en el plano de la figura alrededor de ese punto. En los extremos de la segunda barra hay dos partículas, de masas  $m_1$  y  $m_2$ , con  $m_1 > m_2$ . Hay gravedad,  $\mathbf{g} = -g\hat{z}$ , con  $g > 0$ .
    - a) Elija coordenadas generalizadas y escriba el lagrangiano del sistema.
    - b) Considere la configuración de equilibrio en la que las dos barras están verticales, con la partícula de masa  $m_1$  en el punto más bajo posible. Escriba el lagrangiano de pequeñas oscilaciones para esa configuración de equilibrio y calcule las frecuencias normales.



Problema 1



Problema 4