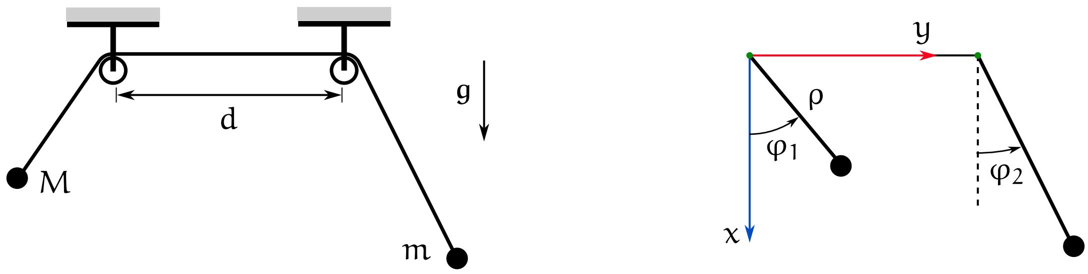
Mecánica Clásica – primer cuatrimestre de 2023

Primer recuperatorio con las soluciones*

■ **Problema 1**. Dos partículas, de masas m y M, están unidas por un hilo de longitud l. El hilo pasa por dos poleas de radio despreciable, como muestra la figura. Las partículas pueden moverse en el plano de la figura. Hay gravedad, $\mathbf{g} = g\hat{x}$. Defina coordenadas generalizadas. Escriba el lagrangiano del sistema y las ecuaciones de Euler-Lagrange. (En la hoja del parcial decía $\mathbf{g} = -g\hat{x}$. El cambio no tiene mucha importancia).



■ **Solución**. Ubiquemos el origen en la polea de la izquierda y definamos los ángulos φ_1, φ_2 y la distancia ρ, como muestra la figura de la derecha. Las posiciones de las partículas son

$$\mathbf{r}_1 = \rho\hat{\rho}(\varphi_1), \qquad \mathbf{r}_2 = d\hat{y} + (\rho_0 - \rho)\hat{\rho}(\varphi_2), \tag{1}$$

donde $\rho_0 = l - d$. Por otro lado, las velocidades son

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\rho}\hat{\rho}(\varphi_1) + \rho\dot{\varphi}_1\hat{\varphi}(\varphi_1), \qquad \dot{\mathbf{r}}_2 = -\dot{\rho}\hat{\rho}(\varphi_2) + (\rho_0 - \rho)\dot{\varphi}_2\hat{\varphi}(\varphi_2). \tag{2}$$

Con esto ya podemos escribir el lagrangiano:

$$\begin{aligned} L(\rho, \varphi_1, \varphi_2, \dot{\rho}, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) &= \tfrac{1}{2}M\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}_1^2\right) + \tfrac{1}{2}m\left[\dot{\rho}^2 + (\rho_0 - \rho)^2\dot{\varphi}_2^2\right] + Mg\rho\cos\varphi_1 + mg(\rho_0 - \rho)\cos\varphi_2 \\ &= \tfrac{1}{2}(M + m)\dot{\rho}^2 + \tfrac{1}{2}M\rho^2\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2}m(\rho_0 - \rho)^2\dot{\varphi}_2^2 + g\rho(M\cos\varphi_1 - m\cos\varphi_2) + mg\rho_0\cos\varphi_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Este lagrangiano conduce a las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\rho} = (M + m)\ddot{\rho} - M\rho\dot{\varphi}_1^2 + m(\rho_0 - \rho)\dot{\varphi}_2^2 - g(M\cos\varphi_1 - m\cos\varphi_2) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi_1} = M(\rho^2\ddot{\varphi}_1 + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi}_1) + Mg\rho\sin\varphi_1 = 0, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi_2} = m\left[(\rho_0 - \rho)^2\ddot{\varphi}_2 - 2(\rho_0 - \rho)\dot{\rho}\dot{\varphi}_2\right] + mg(\rho_0 - \rho)\sin\varphi_2 = 0. \tag{6}$$

*zanellaj@df.uba.ar

■ **Problema 2**. Una partícula de masa m se mueve sobre la superficie definida en coordenadas esféricas por la ecuación $\theta = \alpha$, tal que $\sin^2 \alpha = \lambda$. La partícula se mueve bajo la acción del potencial central

$$V(r) = -\frac{k}{r}, \qquad k > 0. \tag{7}$$

La componente z del momento angular es dato.

a) Escriba el lagrangiano del sistema, reduzca el problema a un problema unidimensional para la coordenada r y grafique el potencial efectivo.

b) Si la energía de la partícula es $E < 0$, encuentre $r(\varphi)$ asumiendo que para $\varphi = 0$ la coordenada r toma su valor mínimo. ¿Bajo qué condiciones la órbita es cerrada?

■ **Solución**. Primero, no es un problema de fuerzas centrales. La partícula se mueve sobre un cono. Usando como coordenadas generalizadas las coordenadas esféricas r y φ, el lagrangiano del sistema es

$$L = \tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \lambda r^2 \dot{\varphi}^2\right) + \frac{k}{r}. \tag{8}$$

La energía y la componente z del momento angular se conservan,

$$\tfrac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \lambda r^2 \dot{\varphi}^2\right) - \frac{k}{r} = E, \tag{9}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\lambda r^2 \dot{\varphi} = \ell. \tag{10}$$

Usando la segunda ecuación para eliminar $\dot{\varphi}$, la primera se reescribe como

$$\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2m\lambda r^2} - \frac{k}{r} = E. \tag{11}$$

El potencial efectivo tiene la misma forma que el del problema de Kepler atractivo.

Para escribir la ecuación diferencial de la órbita hagamos un cambio de variable independiente

$$\dot{r}(t) = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = r'(\varphi)\,\frac{\ell}{m\lambda r^2}. \tag{12}$$

Con esto, la ecuación de conservación de la energía se lee como

$$\frac{\ell^2}{2m\lambda^2 r^4}r'^2 + \frac{\ell^2}{2m\lambda r^2} - \frac{k}{r} = E. \tag{13}$$

Introduciendo la variable dependiente $u = r^{-1}$ y reagrupando

$$u'^2 + \lambda u^2 - \frac{2mk\lambda^2}{\ell^2}u = \frac{2m\lambda^2}{\ell^2}E. \tag{14}$$

Ya que se pide analizar el caso en el que E es negativa, definamos $\mathcal{E} = -E$. Completando cuadrados,

$$u'^2 + \lambda \left(u - \frac{mk\lambda}{\ell^2} \right)^2 = \left(\frac{mk\lambda}{\ell^2} \right)^2 \left(\lambda - \frac{2\ell^2 \mathcal{E}}{mk^2} \right). \tag{15}$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico desplazado. La solución es

$$u(\varphi) = \frac{mk\lambda}{\ell^2} \left\{ 1 + e \cos \left[\sqrt{\lambda} \, (\varphi - \varphi_0) \right] \right\}, \tag{16}$$

donde

$$e = \sqrt{\lambda - \frac{2\ell^2 \mathcal{E}}{mk^2}}. \tag{17}$$

Para que el radio sea mínimo en $\varphi = 0$, podemos elegir $\varphi_0 = 0$. Teniendo en cuenta que $\lambda = \sin^2 \alpha$, resulta finalmente

$$r(\varphi) = \frac{\ell^2}{mk \sin^2 \alpha} \, \frac{1}{1 + e \cos(\sin \alpha \, \varphi)}. \tag{18}$$

Por lo tanto, la órbita es cerrada si $\sin \alpha$ es un número racional.

■ **Problema 3**. Una partícula de masa m se mueve en el plano xy bajo la acción del potencial

$$V(x, y) = mgy. \tag{19}$$

a) Escriba el lagrangiano usando las coordenadas cartesianas.

b) Hay dos simetrías del lagrangiano que son evidentes. ¿Cuáles son estas simetrías y qué constantes de movimiento tienen asociadas?

c) Muestre que la transformación $x' = x + \epsilon \dot{y},\ y' = y + \epsilon \dot{x}$ es una cuasisimetría del lagrangiano y dé la constante de movimiento asociada.

■ **Solución**. El lagrangiano es

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \tfrac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) - mgy. \tag{20}$$

Las dos simetrías evidentes son la invariancia frente a traslaciones en x y la invariancia frente a traslaciones en t. Es decir: L no depende de x ni de t. Las cantidades conservadas son

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \\ h &= T + V = \tfrac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right) + mgy. \end{aligned} \tag{21}$$

Aplicando la transformación indicada en el enunciado resulta

$$L(x', y', \dot{x}', \dot{y}') = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + m\epsilon \big(\dot{x}\ddot{y} + \dot{y}\ddot{x} - g\dot{x} \big) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{22}$$

Vemos entonces que, a orden ϵ,

$$L' = L + \epsilon \frac{dF}{dt}, \tag{23}$$

donde

$$F = m(\dot{x}\dot{y} - gx). \tag{24}$$

De manera que tenemos un lagrangiano que, hasta orden ϵ, satisface la condición

$$L(x + \epsilon\dot{y}, y + \epsilon\dot{x}, \dot{x} + \epsilon\ddot{y}, \dot{y} + \epsilon\ddot{x}) = L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + \epsilon \frac{dF}{dt}. \tag{25}$$

Expandiendo el miembro de la izquierda,

$$\frac{\partial L}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial y}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\ddot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\ddot{x} = \frac{dF}{dt}. \tag{26}$$

Sobre soluciones de las ecuaciones de movimiento podemos usar las ecuaciones de E-L. Entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{y} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{x} - F\right) \stackrel{*}{=} 0. \tag{27}$$

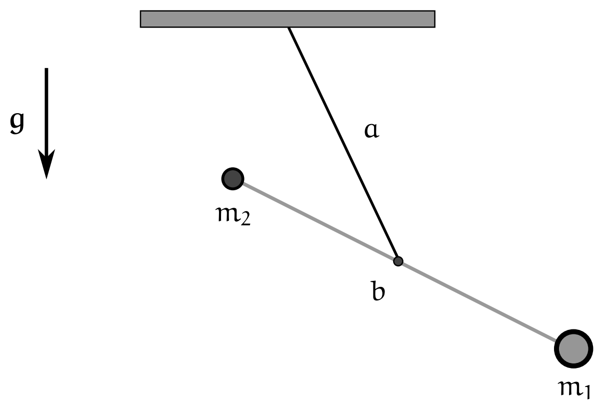
La cantidad entre paréntesis es una constante de movimiento. Usando las formas explícitas de L y F, omitiendo un factor m, resulta

$$C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}\dot{y} + gx. \tag{28}$$

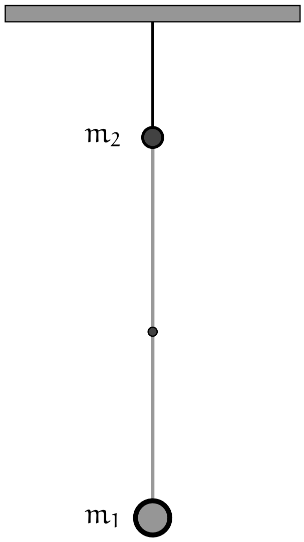
■ **Problema 4**. Un péndulo está formado por dos barras de longitudes a y b como muestra la figura. La barra de longitud a tiene un extremo fijo, alrededor del cual puede rotar en el plano de la figura. La segunda barra está unida a la primera por su punto medio y puede rotar en el plano de la figura alrededor de ese punto. En los extremos de la segunda barra hay dos partículas, de masas m_1 y m_2, con $m_1 > m_2$. Hay gravedad, $\mathbf{g} = g\hat{x}$. (En el parcial decía $\mathbf{g} = -g\hat{z}$).

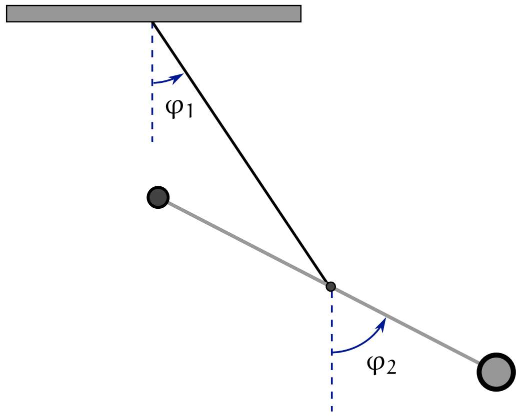
a) Elija coordenadas generalizadas y escriba el lagrangiano del sistema.

b) Considere la configuración de equilibrio en la que las dos barras están verticales, con la partícula de masa m_1 en el punto más bajo posible. Escriba el lagrangiano de pequeñas oscilaciones para esa configuración de equilibrio y calcule las frecuencias normales.



■ **Solución**. El punto de equilibro que se pide analizar se muestra en la figura de la izquierda. A la derecha se muestra la elección de coordenadas generalizadas, de modo que en el equilibrio $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.





Las posiciones de las partículas son

$$\mathbf{r}_1 = a\hat{\rho}(\varphi_1) + \frac{b}{2}\hat{\rho}(\varphi_2), \qquad \mathbf{r}_2 = a\hat{\rho}(\varphi_1) - \frac{b}{2}\hat{\rho}(\varphi_2). \tag{29}$$

Por lo tanto,

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = a\dot{\varphi}_1\hat{\varphi}(\varphi_1) + \frac{b}{2}\dot{\varphi}_2\hat{\varphi}(\varphi_2), \qquad \dot{\mathbf{r}}_2 = a\dot{\varphi}_1\hat{\varphi}(\varphi_1) - \frac{b}{2}\dot{\varphi}_2\hat{\varphi}(\varphi_2). \tag{30}$$

Con esto, el lagrangiano resulta

$$\begin{aligned} L = \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)a^2\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\frac{b^2}{4}\dot{\varphi}_2^2 + (m_1-m_2)a\frac{b}{2}\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) \\ + (m_1+m_2)ga\cos\varphi_1 + (m_1-m_2)g\frac{b}{2}\cos\varphi_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Para adimensionalizar, dividamos primero por $(m_1+m_2)a^2$:

$$\frac{L}{(m_1+m_2)a^2} = \tfrac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \tfrac{1}{2}\ell^2\dot{\varphi}_2^2 + \mu\ell\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \frac{g}{a}\cos\varphi_1 + \mu\frac{g}{a}\ell\cos\varphi_2, \tag{32}$$

donde hemos introducido los parámetros adimensionales

$$\mu = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}, \qquad \ell = \frac{b}{2a}. \tag{33}$$

Para terminar, dividamos por g/a e introduzcamos el cambio de variables

$$\sqrt{\frac{g}{a}}\,t \to t, \tag{34}$$

con lo que resulta

$$\frac{L}{(m_1+m_2)ga} = \tfrac{1}{2}\dot\varphi_1^2 + \tfrac{1}{2}\ell^2\dot\varphi_2^2 + \mu\ell\dot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \cos\varphi_1 + \mu\ell\cos\varphi_2. \tag{35}$$

El lagrangiano adimensionalizado de pequeñas oscilaciones es

$$L_{\rm osc} = \tfrac{1}{2}\dot\varphi_1^2 + \tfrac{1}{2}\ell^2\dot\varphi_2^2 + \mu\ell\dot\varphi_1\dot\varphi_2 - \tfrac{1}{2}\varphi_1^2 - \tfrac{1}{2}\mu\ell\varphi_2^2. \tag{36}$$

Las matrices de energía cinética y de energía potencial son

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & \mu\ell \\ \mu\ell & \ell^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu\ell \end{pmatrix}. \tag{37}$$

El problema de autovalores es

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & \mu\ell\lambda \\ \mu\ell\lambda & \ell^2\lambda-\mu\ell \end{vmatrix} = 0, \tag{38}$$

donde $\lambda = \omega^2$. Explícitamente,

$$\ell\left(1-\mu^2\right)\lambda^2 - \lambda(\mu+\ell) + \mu = 0. \tag{39}$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\begin{aligned} \lambda_\pm &= \frac{1}{2\ell\,(1-\mu^2)}\left[(\mu+\ell) \pm \sqrt{(\mu+\ell)^2 - 4\mu\ell\,(1-\mu^2)}\right] \\ &= \frac{1}{2\ell\,(1-\mu^2)}\left[(\mu+\ell) \pm \sqrt{(\mu-\ell)^2 + 4\mu^3\ell}\right]. \end{aligned} \tag{40}$$

No es difícil ver que, bajo la condición $0 < \mu < 1$, los dos autovalores son positivos, de modo que el equilibrio siempre es estable. Las frecuencias normales, con las dimensiones devueltas, son

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{g}{a}\lambda_\pm}. \tag{41}$$