Mecánica Clásica – primer cuatrimestre de 2023 – segundo parcial: 13/7

Por favor resuelva en hojas separadas y justifique todas sus respuestas

1. El centro de masa de un giróscopo está fijo en el origen. Sus momentos principales de inercia con respecto a su centro de masa son $I_1 = I_2$ e I_3. Una partícula de masa m está fija sobre el eje 3 a una distancia l del origen, como muestra la figura. Hay gravedad, $\mathbf{g} = -g\hat{z}$. Inicialmente

$$\theta(0) = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \phi(0) = \psi(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = \omega, \quad \dot{\psi}(0) = \Omega.$$

   a) Escriba el lagrangiano y defina un problema efectivo para el ángulo θ.

   b) ¿Cuánto debe valer ω para que la partícula describa un círculo en el plano $z = 0$?

2. Considere la siguiente transformación de coordenadas, donde α y β son constantes:

$$Q = \frac{\alpha p}{q}, \qquad P = \beta q^2.$$

   a) ¿Bajo qué condiciones la transformación es canónica?

   b) En tal caso, obtenga una función generatriz.

   c) Aplique la transformación para resolver el problema de un oscilador cuyo hamiltoniano es $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$. Es decir, encuentre $q(t)$ y $p(t)$.

3. Una partícula de masa m se mueve en el eje x en un potencial $V(x) = \frac{1}{2}k\left(|x| - a\right)^2$, donde k y a son mayores que cero.

   a) Grafique el retrato de fase y muestre que el plano de fase se divide en tres regiones, en cada una de las cuales hay movimiento de libración.

   b) En cada una de las regiones, calcule la variable de acción $J(E)$.

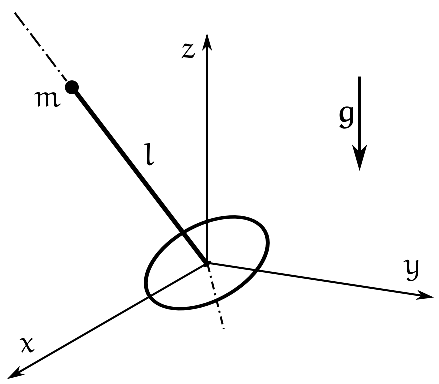
4. Un sistema con dos grados de libertad está descripto por el hamiltoniano

$$H(x, y, p_x, p_y, t) = p_x p_y \cos\omega t + \tfrac{1}{2}\left(p_x^2 - p_y^2\right)\sin\omega t.$$

   a) Resuelva la ecuación de H–J dependiente del tiempo para la función S.

   b) A partir de S, encuentre $x(t)$ e $y(t)$.

   c) ¿Cuál es la trayectoria en el plano xy?



$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int dx\, \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\int dx\, \tan x = -\log(\cos x)$$