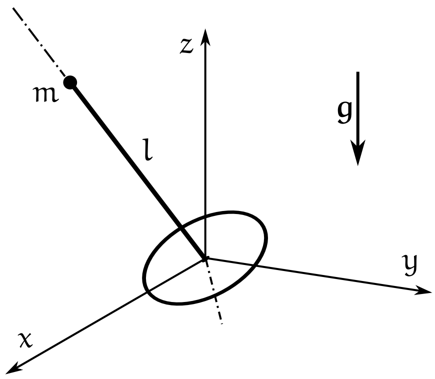
Mecánica Clásica – primer cuatrimestre de 2023
Segundo parcial con las soluciones*

■ **Problema 1**. El centro de masa de un giróscopo está fijo en el origen. Sus momentos principales de inercia con respecto a su centro de masa son $I_1 = I_2$ e I_3. Una partícula de masa m está fija sobre el eje 3 a una distancia l del origen, como muestra la figura. Hay gravedad, $\mathbf{g} = -g\hat{z}$. Inicialmente

$$\theta(0) = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \phi(0) = \psi(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = \omega, \quad \dot{\psi}(0) = \Omega. \tag{1}$$

a) Escriba el lagrangiano y defina un problema efectivo para el ángulo θ.

b) ¿Cuánto debe valer ω para que la partícula describa un círculo en el plano $z = 0$?



■ **Solución**. Los ángulos de Euler del giróscopo son un conjunto adecuado de coordenadas generalizadas. Teniendo en cuenta que el centro de masa del giróscopo está fijo y que la posición de la partícula es

$$\mathbf{r} = l\hat{e}_3(\varphi, \theta) \quad \Rightarrow \quad |\dot{\mathbf{r}}|^2 = l^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right), \tag{2}$$

el lagrangiano es

$$L = \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 + \frac{I}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) - mgl\cos\theta, \tag{3}$$

donde

$$I = I_1 + ml^2. \tag{4}$$

El problema efectivo para el ángulo θ es el que tantas veces hemos encontrado en las guías. La conservación de p_ψ, p_φ y h conduce a la siguiente ecuación para θ:

$$\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + mgl\cos\theta = C. \tag{5}$$

---
*zanellaj@df.uba.ar

En términos de los ángulos y de sus velocidades, las constantes p_ψ y p_φ son

$$p_\psi = I_3\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\theta\right), \qquad p_\varphi = p_\psi\cos\theta + I\dot\varphi\sin^2\theta. \tag{6}$$

Las condiciones iniciales definen los valores de las constantes:

$$p_\psi = I_3\Omega, \qquad p_\varphi = I\omega, \qquad C = \tfrac{1}{2}I\omega^2. \tag{7}$$

Con esto, la Ec. (5) se escribe como

$$\tfrac{1}{2}I\dot\theta^2 + V_{\text{ef}}(\theta) = \tfrac{1}{2}I\omega^2, \tag{8}$$

donde el potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{(I\omega - I_3\Omega\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + mgl\cos\theta. \tag{9}$$

La partícula describirá un círculo en el plano $z = 0$, si $\theta(t) = \frac{1}{2}\pi$ es solución del problema efectivo. Entonces, $V_{\text{ef}}(\theta)$ deberá tener ahí un punto estacionario,

$$V'_{\text{ef}}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 0. \tag{10}$$

A medida que uno calcula la derivada puede ir evaluando en $\theta = \frac{1}{2}\pi$. El resultado es

$$V'_{\text{ef}}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = I_3\Omega\omega - mgl. \tag{11}$$

Si esto debe ser cero, entonces

$$\omega = \frac{mgl}{I_3\Omega}. \tag{12}$$

■ **Problema 2**. Considere la siguiente transformación, donde α y β son constantes:

$$Q = \frac{\alpha p}{q}, \qquad P = \beta q^2. \tag{13}$$

a) ¿Bajo qué condiciones la transformación es canónica?

b) En tal caso, obtenga una función generatriz.

c) Aplique la transformación para resolver el problema de un oscilador cuyo hamiltoniano es $H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$. Es decir, encuentre $q(t)$ y $p(t)$.

■ **Solución**. Para que la transformación sea invertible, debemos restringir el intervalo de variación de q. Vamos a tomar $q \geqslant 0$. La transformación es canónica si $[Q, P] = 1$. Explícitamente,

$$[Q, P] = \left[\frac{\alpha p}{q}, \beta q^2\right] = \alpha\beta\left[\frac{p}{q},\ q^2\right] = 2q\alpha\beta\left[\frac{p}{q},\ q\right] = 2\alpha\beta\,[p, q] = -2\alpha\beta. \tag{14}$$

De modo que para que la transformación sea canónica debe ser $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$.

Puesto que es sencillo escribir la transformación en términos de las variables q y Q, busquemos una función generatriz de tipo F_1. Debe satisfacer las ecuaciones

$$\frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial q} = p(q,Q), \qquad \frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial Q} = -P(q,Q). \tag{15}$$

Explícitamente,

$$\frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial q} = \frac{qQ}{\alpha}, \qquad \frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial Q} = -\beta q^2. \tag{16}$$

Integrando la primera ecuación, resulta

$$F_1(q,Q) = \frac{q^2 Q}{2\alpha} + f(Q). \tag{17}$$

Derivando esta expresión con respecto a Q y comparando con la segunda Ec. (16), se obtiene

$$\frac{q^2}{2\alpha} + f'(Q) = -\beta q^2. \tag{18}$$

Esto implica dos cosas: primero, que $f'(Q) = 0$ y, segundo, que $\alpha\beta = -\frac{1}{2}$. Llegamos así a la misma condición que con los corchetes de Poisson. En definitiva, podemos tomar

$$F_1(q,Q) = \frac{q^2 Q}{2\alpha}. \tag{19}$$

Es fácil ver que también existen funciones generatrices de tipo 3 y 4, pero no de tipo 2.

Para resolver el problema del oscilador, una elección cómoda es $\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$. De esta forma, las ecuaciones de transformación (13) implican

$$q = \sqrt{2P}, \qquad p = -\sqrt{2P}Q. \tag{20}$$

Notando que

$$q^2 = 2P, \qquad p^2 = 2PQ^2, \tag{21}$$

la transformación lleva del hamiltoniano $H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ al hamiltoniano

$$K(Q,P) = PQ^2 + \omega^2 P. \tag{22}$$

Las ecuaciones de Hamilton para las nuevas coordenadas son

$$\dot{Q} = \omega^2 + Q^2, \qquad \dot{P} = -2PQ. \tag{23}$$

Integrando la primera, obtenemos

$$Q(t) = \omega \tan \omega(t - t_0). \tag{24}$$

La segunda Ec. (23) puede escribirse entonces como

$$\frac{d\log P}{dt} = -2\omega \tan \omega(t - t_0). \tag{25}$$

Podemos integrar esto directamente. Pero también podemos notar que

$$\tan \omega t = \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} = -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\log(\cos \omega t)\,. \tag{26}$$

Luego,

$$\log P = 2\log\left[\cos \omega(t - t_0)\right] + C. \tag{27}$$

Finalmente,

$$P(t) = P_0 \cos^2 \omega(t - t_0). \tag{28}$$

Para obtener la evolución de las coordenadas originales, recurrimos a las Ecs. (20),

$$\begin{aligned} q(t) &= \sqrt{2P_0}\,\cos \omega(t - t_0), \\ p(t) &= -\omega\sqrt{2P_0}\,\sin \omega(t - t_0). \end{aligned} \tag{29}$$

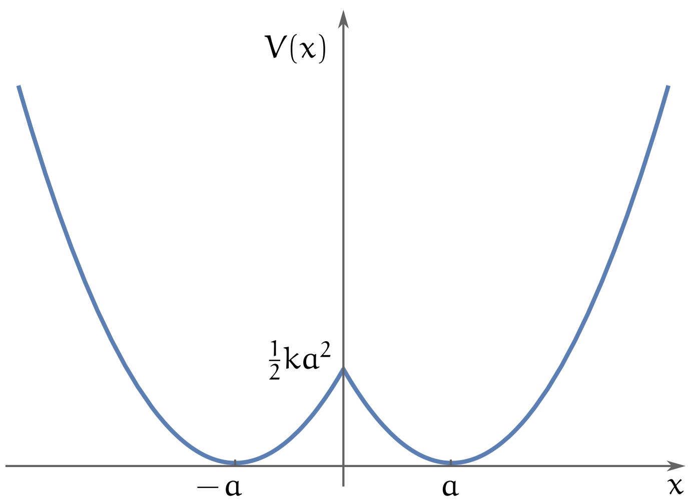
Según notamos al comienzo, esto es válido para $q \geqslant 0$. Pero si la solución es continua y diferenciable, las ecuaciones anteriores deben valer en general.

■ **Problema 3**. Una partícula de masa m se mueve en el eje x en un potencial $V(x) = \frac{1}{2}k\,(|x| - a)^2$, donde k y a son mayores que cero.

a) Grafique el retrato de fase y muestre que el plano de fase se divide en tres regiones, en cada una de las cuales hay movimiento de libración.

b) En cada una de las regiones, calcule la variable de acción $J(E)$.

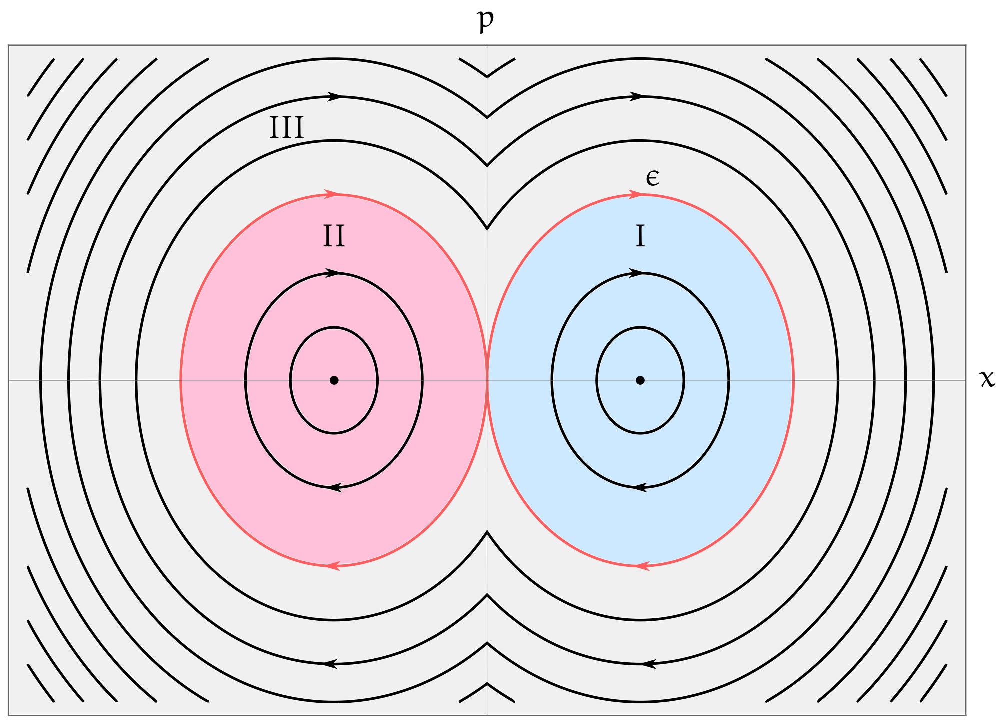
■ **Solución**. La siguiente figura muestra el potencial $V(x)$.



El retrato de fase puede construirse a partir de este gráfico. Para energías menores al valor crítico

$$\epsilon = \tfrac{1}{2}ka^2, \tag{30}$$

las órbitas son elipses disjuntas, centradas en el eje x en a y $-a$. Justo en $E = \epsilon$ las elipses se tocan en un punto. En rigor, la recta $x = 0$ no pertenece al espacio de fase, porque ahí el potencial no es diferenciable. Para energías mayores que ϵ, las órbitas son la unión de dos arcos de elipse que se intersectan en el eje p.



Las tres regiones en las que se divide el plano de fase son:

$$\begin{cases} \mathrm{I}: & x > 0 \wedge E < \epsilon, \\ \mathrm{II}: & x < 0 \wedge E < \epsilon, \\ \mathrm{III}: & \quad E > \epsilon. \end{cases} \tag{31}$$

Debido a la forma del potencial, evidentemente en cada región hay movimiento de libración. En las regiones I y II, las órbitas son elipses definidas por la ecuación

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x \pm a)^2 = E. \tag{32}$$

El área encerrada por cada una de estas órbitas es

$$\mathcal{A}(E) = 2\pi E\sqrt{\frac{m}{k}} \equiv \frac{2\pi E}{\omega}. \tag{33}$$

Por lo tanto, las variables de acción en estas regiones estarán dadas por

$$J(E) = \frac{\mathcal{A}(E)}{2\pi} = \frac{E}{\omega}. \tag{34}$$

No es inesperado encontrar la misma expresión que para un oscilador armónico. En estas regiones la partícula nunca ve otra cosa que no sea un potencial cuadrático.

En la región III, el cálculo es un poco más complicado. Conviene integrar explícitamente. El área encerrada por una órbita de energía E puede escribirse como

$$\mathcal{A}(E) = 4\int_0^{x(E)} dx\, \sqrt{2mE - \omega^2 m^2 (x-a)^2}, \tag{35}$$

donde $x(E)$ es el valor positivo de x en el que se anula el argumento de la raíz cuadrada, es decir, el punto de retorno. No hay ninguna necesidad de calcular $x(E)$. La integral que necesitamos es

$$\int dx\, \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right). \tag{36}$$

Queda

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(E) &= \frac{4E}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\sqrt{\frac{m\omega^2 a^2}{2E}} + \sqrt{\frac{m\omega^2 a^2}{2E}}\sqrt{1-\frac{m\omega^2 a^2}{2E}}\right) \\ &= \frac{4E}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\sqrt{\frac{\epsilon}{E}} + \sqrt{\frac{\epsilon}{E}}\sqrt{1-\frac{\epsilon}{E}}\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Finalmente, en la región III,

$$J(E) = \frac{2E}{\pi\omega}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\sqrt{\frac{\epsilon}{E}} + \sqrt{\frac{\epsilon}{E}}\sqrt{1-\frac{\epsilon}{E}}\right). \tag{38}$$

Dos verificaciones: cuando $E \to \epsilon$, deberíamos obtener el doble de la variable de acción de las regiones I o II. En efecto,

$$J(\epsilon) = \frac{2\epsilon}{\omega}. \tag{39}$$

Por otro lado, cuando $E \gg \epsilon$, el área debe tender al área de la elipse definida por

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E, \tag{40}$$

que es

$$\mathcal{A}_\infty(E) = \frac{2\pi E}{\omega}. \tag{41}$$

Eso se obtiene cuando se considera el comportamiento de la expresión (37) para $E \to \infty$.

■ **Problema 4**. Un sistema con dos grados de libertad está descripto por el hamiltoniano

$$H(x, y, p_x, p_y, t) = p_x p_y \cos\omega t + \tfrac{1}{2}\left(p_x^2 - p_y^2\right)\sin\omega t. \tag{42}$$

a) Resuelva la ecuación de H–J dependiente del tiempo para la función S.

b) A partir de S, encuentre $x(t)$ e $y(t)$.

c) ¿Cuál es la trayectoria en el plano xy?

■ **Solución**. La ecuación de H–J dependiente del tiempo es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial S}{\partial y}\cos\omega t + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right]\sin\omega t = 0. \tag{43}$$

Puesto que las coordenadas x e y son cíclicas, proponemos una solución de la forma

$$S(x, y, t) = T(t) + p_x x + p_y y. \tag{44}$$

Obtenemos así la siguiente ecuación diferencial para la función $T(t)$

$$T'(t) = -p_x p_y \cos\omega t - \tfrac{1}{2}\left(p_x^2 - p_y^2\right)\sin\omega t. \tag{45}$$

Integrando,

$$T(t) = -\frac{p_x p_y}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{2\omega}\left(p_x^2 - p_y^2\right)\cos\omega t. \tag{46}$$

La constante de integración es irrelevante. La función S se escribe entonces como

$$S(x, y, p_x, p_y, t) = -\frac{p_x p_y}{\omega}\sin\omega t + \frac{1}{2\omega}\left(p_x^2 - p_y^2\right)\cos\omega t + p_x x + p_y y. \tag{47}$$

Los nuevos impulsos coinciden con los originales. Las ecuaciones de transformación para las nuevas coordenadas son

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial p_x} = x - \frac{p_y}{\omega}\sin\omega t + \frac{p_x}{\omega}\cos\omega t, \\ Q_2 &= \frac{\partial S}{\partial p_y} = y - \frac{p_x}{\omega}\sin\omega t - \frac{p_y}{\omega}\cos\omega t. \end{aligned} \tag{48}$$

Debido a que las coordenadas Q_1 y Q_2 son constantes

$$\begin{aligned} x(t) &= Q_1 + \frac{p_y}{\omega}\sin\omega t - \frac{p_x}{\omega}\cos\omega t, \\ y(t) &= Q_2 + \frac{p_x}{\omega}\sin\omega t + \frac{p_y}{\omega}\cos\omega t. \end{aligned} \tag{49}$$

Es fácil ver que

$$(x - Q_1)^2 + (y - Q_2)^2 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{\omega^2}, \tag{50}$$

de manera que la trayectoria en el plano xy es un círculo.