Mecánica Clásica – primer cuatrimestre de 2023 – segundo recuperatorio: 27/7

Por favor resuelva en hojas separadas y justifique todas sus respuestas

1. El centro de masa de un giróscopo está fijo en el origen. Sus momentos principales de inercia con respecto a su centro de masa son $I_1 = I_2$ e I_3. Una partícula de masa m está fija sobre el eje 3 a una distancia l del origen, como muestra la figura. Hay gravedad, $\mathbf{g} = -g\hat{z}$. Inicialmente

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = \omega, \quad \dot{\psi}(0) = \Omega.$$

   a) Escriba el lagrangiano y defina un problema efectivo para el ángulo θ.

   b) ¿Cuánto debe valer ω para que la partícula describa un círculo en el plano $z = l\cos\theta_0$?

2. Encuentre una función generatriz de tipo $F_4(p, P, t)$ que genere una transformación canónica que lleve del hamiltoniano $H(q, p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$ al hamiltoniano $K(Q, P) = 0$.

3. Una partícula de masa m se mueve en el eje x en bajo la influencia del potencial que muestra la figura, donde ϵ y a son positivos.

   a) Grafique el retrato de fase.

   b) En la región de libración, encuentre las coordenadas de ángulo acción $J(x, p)$ y $\theta(x, p)$.

   c) Grafique sus curvas coordenadas, es decir, las curvas en el plano xp en donde J y θ toman valores constantes.

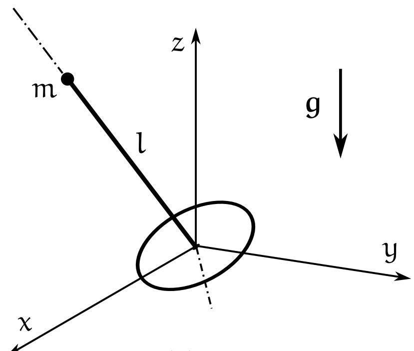
4. Una partícula de masa m se mueve en el plano $z = 0$ bajo la influencia del potencial central

$$V(r) = \frac{k}{r^2}, \qquad k > 0.$$

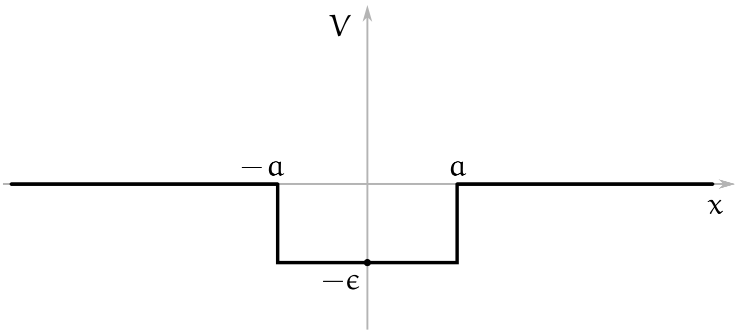
   Su movimiento se describe usando las coordenadas r y φ.

   a) Escriba la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo para la función W.

   b) A partir de W, encuentre $r(t)$ y $r(\varphi)$ si en $t = 0$ el radio r toma su valor mínimo y $\varphi = 0$.



Problema 1



Problema 3

$$dF_4 = -q\,dp + Q\,dP - (H - K)\,dt,$$

$$\int dx\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}\right), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x.$$