Mecánica Clásica – primer cuatrimestre de 2023

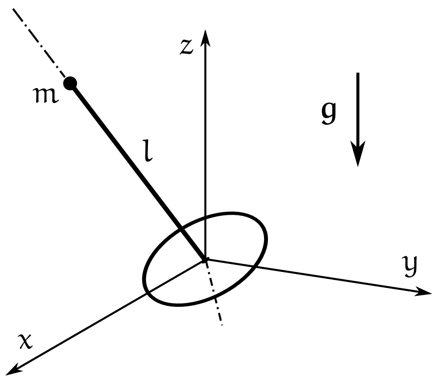
Segundo recuperatorio con las soluciones

■ **Problema 1**. El centro de masa de un giróscopo está fijo en el origen. Sus momentos principales de inercia con respecto a su centro de masa son $I_1 = I_2$ e I_3. Una partícula de masa m está fija sobre el eje 3 a una distancia l del origen, como muestra la figura. Hay gravedad, $\mathbf{g} = -g\hat{z}$. Inicialmente

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = \omega, \quad \dot{\psi}(0) = \Omega. \tag{1}$$

a) Escriba el lagrangiano y defina un problema efectivo para el ángulo θ.

b) ¿Cuánto debe valer ω para que la partícula describa un círculo en el plano $z = l\cos\theta_0$?



Solución. Los ángulos de Euler del giróscopo son coordenadas generalizadas adecuadas. La partícula está en la posición

$$\mathbf{r} = l\hat{e}_3(\varphi, \theta), \tag{2}$$

de manera que

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = l^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right). \tag{3}$$

Por otro lado, la energía cinética del giróscopo es

$$T_g = \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 + \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right). \tag{4}$$

Luego, el lagrangiano del sistema es

$$L = \frac{I_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta\right)^2 + \frac{I}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) - mgl\cos\theta, \tag{5}$$

donde

$$I = I_1 + ml^2. \tag{6}$$

Siguiendo el procedimiento usual, a partir de las conservaciones de E, p_ψ y p_φ se obtiene el problema efectivo para θ, definido por la ecuación

$$\frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + mgl\cos\theta = E', \tag{7}$$

donde

$$E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}. \tag{8}$$

Las condiciones iniciales fijan los valores de las constantes:

$$\begin{aligned} p_\psi &= I_3(\Omega + \omega\cos\theta_0), \\ p_\varphi &= p_\psi\cos\theta_0 + I\omega\sin^2\theta_0, \\ E &= \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{I}{2}\omega^2\sin^2\theta_0 + mgl\cos\theta_0. \end{aligned} \tag{9}$$

Para lo que sigue, el valor de E no tiene importancia. Reemplazando p_φ en la Ec. (7), queda

$$\tfrac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{\left[p_\psi(\cos\theta_0 - \cos\theta) + I\omega\sin^2\theta_0\right]^2}{2I\sin^2\theta} + mgl\cos\theta = E'. \tag{10}$$

El potencial efectivo es

$$V_{\text{ef}}(\theta) = \frac{\left[p_\psi(\cos\theta_0 - \cos\theta) + I\omega\sin^2\theta_0\right]^2}{2I\sin^2\theta} + mgl\cos\theta. \tag{11}$$

Si la partícula se mueve en un círculo en el plano $z = l\cos\theta_0$, entonces θ_0 debe ser un punto estacionario del potencial efectivo,

$$V'_{\text{ef}}(\theta_0) = 0. \tag{12}$$

Calculando la derivada explícitamente, resulta

$$\begin{aligned} V'_{\text{ef}}(\theta_0) &= \omega p_\psi\sin\theta_0 - I\omega^2\sin\theta_0\cos\theta_0 - mgl\sin\theta_0 \\ &= \left[(I_3 - I)\cos\theta_0\ \omega^2 + I_3\Omega\omega - mgl\right]\sin\theta_0. \end{aligned} \tag{13}$$

Dejando de lado el caso en que $\sin\theta_0 = 0$, para que se anule la expresión anterior debe ser

$$(I_3 - I)\cos\theta_0\ \omega^2 + I_3\Omega\omega - mgl = 0. \tag{14}$$

Si $(I_3 - I)\cos\theta_0 \neq 0$, de aquí se obtienen dos valores de ω,

$$\omega_\pm = \frac{1}{2(I_3 - I)\cos\theta_0}\left(-I_3\Omega \pm \sqrt{I_3^2\Omega^2 + 4mgl(I_3 - I)\cos\theta_0}\right). \tag{15}$$

Si $(I_3 - I)\cos\theta_0 = 0$, existe un sólo valor de ω, dado por

$$\omega = \frac{mgl}{I_3\Omega}. \tag{16}$$

Una última observación. Los valores de ω dados por la Ec. (15) no siempre son reales. Para que el movimiento sea físicamente realizable debe ser

$$I_3^2\Omega^2 + 4mgl(I_3 - I)\cos\theta_0 \geqslant 0. \tag{17}$$

■ **Problema 2**. Encuentre una función generatriz de tipo $F_4(p, P, t)$ que genere una transformación canónica que lleve del hamiltoniano $H(q, p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right)$ al hamiltoniano $K(Q, P) = 0$.

Solución 1. El objetivo es encontrar una función generatriz tal que

$$\frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial t} + H(q, p) = 0. \tag{18}$$

Pero

$$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, \tag{19}$$

de modo que lo que debemos buscar es que sea

$$\frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p}, p\right) = 0. \tag{20}$$

A imitación del método de Hamilton–Jacobi, planteamos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial \mathcal{S}(p, t)}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial \mathcal{S}(p, t)}{\partial p}, p\right) = 0. \tag{21}$$

Como H es independiente del tiempo, buscamos una solución de la forma

$$\mathcal{S}(p, t) = -Et + \mathcal{W}(p). \tag{22}$$

La función $\mathcal{W}$ debe satisfacer entonces la siguiente ecuación

$$H\Big(-\mathcal{W}'(p), p\Big) = E. \tag{23}$$

Para el caso específico del hamiltoniano del oscilador armónico, resulta

$$\tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}\omega^2\mathcal{W}'(p)^2 = E. \tag{24}$$

Despejando,

$$\mathcal{W}'(p) = \pm\frac{1}{\omega}\sqrt{2E - p^2}. \tag{25}$$

Habrá entonces dos soluciones y dependerán no sólo de p sino también de E. Como el enunciado pide *una* función generatriz, nos quedaremos con una de las dos soluciones,

$$\mathcal{W}(p, E) = \frac{1}{\omega} \int_{p(E)}^{p} dp\, \sqrt{2E - p^2}. \tag{26}$$

Bastaría con calcular la integral indefinida. Aquí estamos manteniendo la analogía con el método de Hamilton–Jacobi usual y elegimos como límite inferior de la integral el punto de retorno

$$p(E) = -\sqrt{2E}. \tag{27}$$

Debido a que el objetivo es la propia función generatriz y no la solución de las ecuaciones de movimiento, en este caso sí hay que calcular la función $\mathcal{W}$ explícitamente. Necesitamos la siguiente integral

$$\int dx\, \sqrt{1 - x^2} = \tfrac{1}{2} \left(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2} \right). \tag{28}$$

El resultado es

$$\mathcal{W}(p, E) = \frac{E}{\omega} \left[\arccos\!\left(-\frac{p}{\sqrt{2E}} \right) + \frac{p}{\sqrt{2E}} \sqrt{1 - \frac{p^2}{2E}} \right]. \tag{29}$$

La función $\mathcal{S}$ será

$$\mathcal{S}(p, E, t) = -Et + \frac{E}{\omega} \left[\arccos\!\left(-\frac{p}{\sqrt{2E}} \right) + \frac{p}{\sqrt{2E}} \sqrt{1 - \frac{p^2}{2E}} \right]. \tag{30}$$

Cuando usemos $\mathcal{S}$ como función generatriz, transformaremos el hamiltoniano del oscilador armónico en el hamiltoniano nulo. El lugar ocupado por E en la definición de $\mathcal{S}$ puede ser destinado al nuevo impulso. Tendremos así la siguiente función generatriz:

$$F_4(p, P, t) = -Pt + \frac{P}{\omega} \left[\arccos\!\left(-\frac{p}{\sqrt{2P}} \right) + \frac{p}{\sqrt{2P}} \sqrt{1 - \frac{p^2}{2P}} \right]. \tag{31}$$

Solución 2. Sabemos cómo usar el método de Hamilton–Jacobi para obtener una función generatriz de tipo F_2 que conduzca de H al hamiltoniano nulo. La idea es entonces calcular esta F_2 y luego escribir la generatriz F_4 a partir de la relación

$$F_4 = F_2 - pq. \tag{32}$$

Para un sistema conservativo con un sólo grado de libertad, la función S está dada por

$$S(q, t) = -Et + W(q), \tag{33}$$

donde W satisface la ecuación

$$H\Big(q, W'(q)\Big) = E. \tag{34}$$

Explícitamente,

$$\tfrac{1}{2}W'(q)^2 + \tfrac{1}{2}\omega^2 q^2 = E. \tag{35}$$

Puesto que el enunciado pide *una* función generatriz, quedémonos con la que corresponde a la función

$$W(q, E) = \int_{q(E)}^{q} dq\, \sqrt{2E - \omega^2 q^2}, \tag{36}$$

donde, como es usual, el límite inferior de integración es el punto de retorno

$$q(E) = -\frac{\sqrt{2E}}{\omega}, \tag{37}$$

pero bastaría simplemente con calcular la primitiva. Integrando,

$$W(q, E) = \frac{E}{\omega}\left[\arccos\left(-\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\right) + \frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 q^2}{2E}}\,\right]. \tag{38}$$

La solución completa de la ecuación de Hamilton–Jacobi es entonces

$$S(q, E, t) = -Et + \frac{E}{\omega}\left[\arccos\left(-\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\right) + \frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 q^2}{2E}}\,\right]. \tag{39}$$

El lugar que ocupa E puede ser usado para alojar el nuevo impulso P en una función generatriz de tipo F_2, definida por

$$F_2(q, P, t) = -Pt + \frac{P}{\omega}\left[\arccos\left(-\frac{\omega q}{\sqrt{2P}}\right) + \frac{\omega q}{\sqrt{2P}}\sqrt{1 - \frac{\omega^2 q^2}{2P}}\,\right]. \tag{40}$$

Esta función generatriz dará las ecuaciones de transformación válidas para $p \geqslant 0$.

Para escribir la F_4 asociada a esta F_2, primero debemos expresar q en función de p y P. Eso es sencillo, porque tenemos la ecuación

$$\tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}\omega^2 q^2 = P. \tag{41}$$

Para evitarnos un signo menos, elijamos la rama negativa de la función $q(p, P)$,

$$F_2(p, P, t) = -Pt + \frac{P}{\omega}\left[\arccos\left(\sqrt{1 - \frac{p^2}{2P}}\right) - \frac{p}{\sqrt{2P}}\sqrt{1 - \frac{p^2}{2P}}\,\right]. \tag{42}$$

Ya acumulamos dos restricciones: $p \geqslant 0$ y $q \leqslant 0$. Ahora bien, para $x \geqslant 0$

$$\arccos\Big(\sqrt{1 - x^2}\Big) = \arcsin x. \tag{43}$$

Entonces,

$$F_2(p,P,t) = -Pt + \frac{P}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{p}{\sqrt{2P}}\right) - \frac{p}{\sqrt{2P}}\sqrt{1-\frac{p^2}{2P}}\right]. \tag{44}$$

Por otro lado, para la misma rama negativa de la función $q(p,P)$,

$$pq = -\frac{p}{\omega}\sqrt{2P-p^2} = -\frac{2P}{\omega}\frac{p}{\sqrt{2P}}\sqrt{1-\frac{p^2}{2P}}. \tag{45}$$

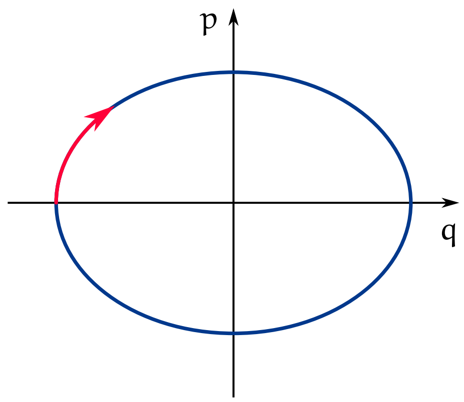
Finalmente, usando la relación $F_4 = F_2 - pq$,

$$\tilde{F}_4(p,P,t) = -Pt + \frac{P}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{p}{\sqrt{2P}}\right) + \frac{p}{\sqrt{2P}}\sqrt{1-\frac{p^2}{2P}}\right]. \tag{46}$$

Usamos el símbolo $\tilde{F}_4$ para distinguir a esta función de la que encontramos mediante el primer método. La función generatriz $\tilde{F}_4$ no es la misma función que obtuvimos antes,

$$F_4(p,P,t) = -Pt + \frac{2P}{\omega}\left[\arccos\left(-\frac{p}{\sqrt{2P}}\right) + \frac{p}{\sqrt{2P}}\sqrt{1-\frac{p^2}{2P}}\right]. \tag{47}$$

Hay que tener presente que ninguno de los dos métodos conduce de por sí a una única función generatriz. En primer lugar, siempre está involucrado el signo de una raíz cuadrada. En segundo lugar, al calcular las funciones $\mathcal{W}$ y W, tenemos la libertad de elegir los límites inferiores de integración. Al calcular la función $W(q,E)$, siguiendo el segundo método, estamos haciendo una integral que recorre la órbita según muestra la siguiente figura.



Visto desde la perspectiva del primer método, esto corresponde a tomar el límite inferior de la integral en $p = 0$ y a quedarnos con la rama negativa de la función q. Es decir, teniendo en cuenta que

$$q = -\frac{\partial \mathcal{W}(p,E)}{\partial p}, \tag{48}$$

lo anterior corresponde a la elegir la siguiente función $\mathcal{W}(p, E)$

$$\mathcal{W}(p,E) = \frac{1}{\omega}\int_0^p dp\,\sqrt{2E-p^2} = \frac{E}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{p}{\sqrt{2E}}\right) + \frac{p}{\sqrt{2E}}\sqrt{1-\frac{p^2}{2E}}\,\right]. \tag{49}$$

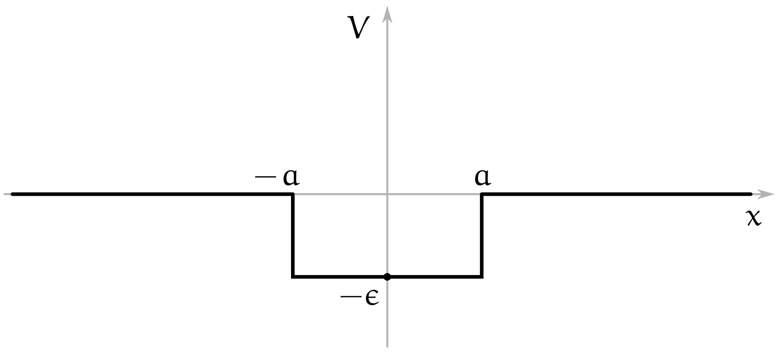
La función F_4 construida a partir de esta función W coincide entonces con la función $\tilde{F}_4$ de la Ec. (46)

■ **Problema 3**. Una partícula de masa m se mueve en el eje x en bajo la influencia del potencial que muestra la figura, donde ϵ y a son positivos.

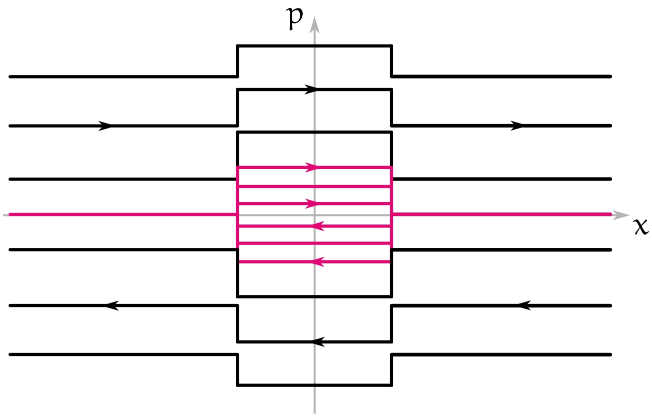
a) Grafique el retrato de fase.

b) En la región de libración, encuentre las coordenadas de ángulo acción $J(x, p)$ y $\theta(x, p)$.

c) Grafique sus curvas coordenadas, es decir, las curvas en el plano xp en donde J y θ toman valores constantes.



Solución. El retrato se fase es como muestra la figura.



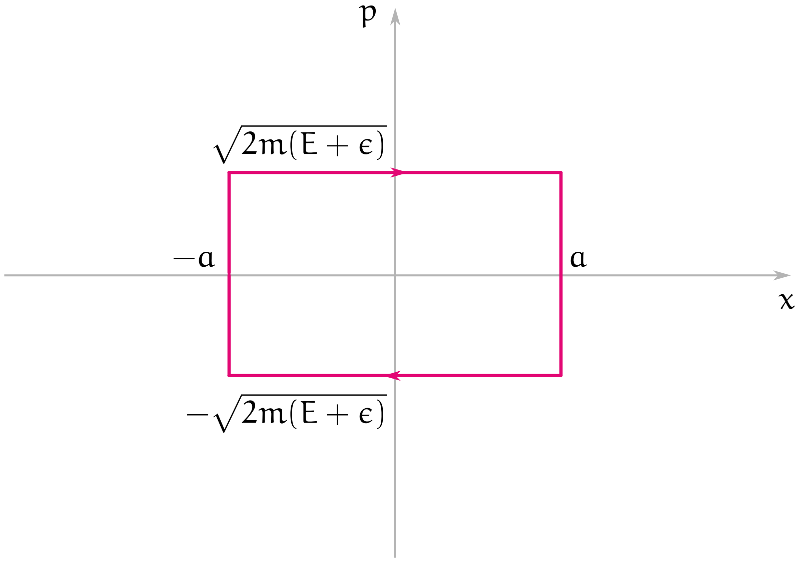
Las alturas de los escalones decrecen conforme aumenta E. La altura de los escalones es proporcional a $\sqrt{E+\epsilon} - \sqrt{E}$. Para energías mucho mayores que ϵ,

$$\sqrt{E+\epsilon} - \sqrt{E} \simeq \frac{\epsilon}{2\sqrt{E}}. \tag{50}$$

Para energías en el intervalo $-\epsilon < E < 0$, habrá movimiento de libración con $-a \leqslant x \leqslant a$. En ese rango de valores de x, las órbitas están definidas por la ecuación

$$\frac{p^2}{2m} - \epsilon = E. \tag{51}$$

La acción es $1/2\pi$ veces el área de la región rectangular mostrada en la figura.



Es decir,

$$J(E) = \frac{2a\sqrt{2m(E+\epsilon)}}{\pi}. \tag{52}$$

Para calcular la variable ángulo, calculemos primero las dos ramas de la función W,

$$W^{\pm}(x,E) = \pm\sqrt{2m(E+\epsilon)}\int_{-a}^{x} dx = \pm(x+a)\sqrt{2m(E+\epsilon)} = \pm\frac{\pi}{2a}(x+a)J(E). \tag{53}$$

Tenemos ahora dos alternativas. La primera consiste en aprovechar la relación sencilla que existe entre $W^{\pm}$ y $J(E)$ y considerar a $W^{\pm}$ función de J. Entonces,

$$\theta^{\pm}(x,J) = \frac{\partial W^{\pm}(x,J)}{\partial J} = \pm\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right). \tag{54}$$

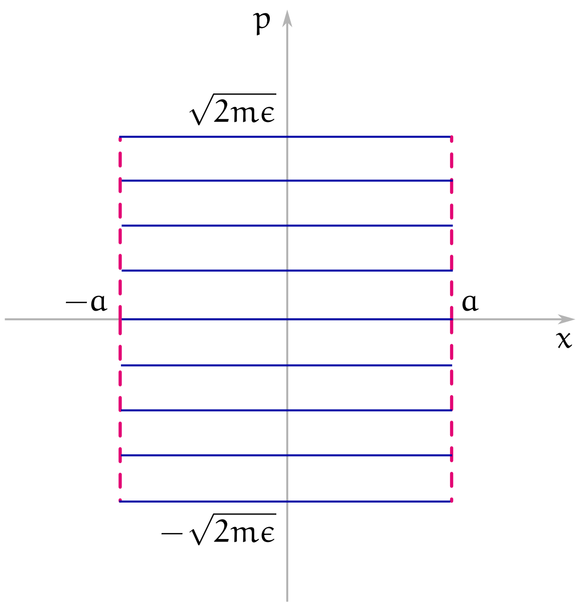
La segunda alternativa, que en los problemas complicados suele ser la más indicada, es usar la regla de la cadena,

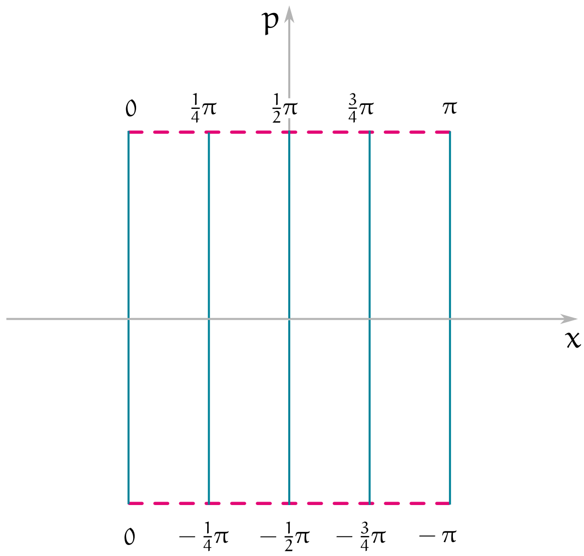
$$\theta^{\pm}(x,E) = \frac{\partial W^{\pm}(x,J)}{\partial J} = \frac{1}{J'(E)}\frac{\partial W^{\pm}(x,E)}{\partial E} = \pm\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right). \tag{55}$$

En función de las variables x y p, queda

$$\begin{aligned} J(x,p) &= \frac{2a|p|}{\pi}, \\ \theta^{\pm}(x,p) &= \pm\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{x}{a}\right). \end{aligned} \tag{56}$$

Las curvas coordenadas de J (figura de la izquierda) son paralelas al eje x y tienen dos ramas simétricas respecto al eje x. Las curvas coordenadas de $\theta^{\pm}$ (figura de la derecha) son paralelas al eje p. En esta figura se indican los valores de θ para cada segmento.





■ **Problema 4**. Una partícula de masa m se mueve en el plano $z = 0$ bajo la influencia del potencial central

$$V(r) = \frac{k}{r^2}, \qquad k > 0. \tag{57}$$

Su movimiento se describe usando las coordenadas r y φ.

a) Escriba la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo para la función W.

b) A partir de W, encuentre $r(t)$ y $r(\varphi)$ si en $t = 0$ el radio r toma su valor mínimo y $\varphi = 0$.

Solución. El hamiltoniano es

$$H(r, \varphi, p_r, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2}. \tag{58}$$

De aquí, la ecuación de Hamilton–Jacobi independiente del tiempo se escribe como

$$\frac{1}{2m}\left[\frac{\partial W(r,\varphi)}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{2mr^2}\left[\frac{\partial W(r,\varphi)}{\partial \varphi}\right]^2 + \frac{k}{r^2} = E. \tag{59}$$

Para resolverla, proponemos la separación

$$W(r, \varphi) = \mathcal{W}(r) + p_\varphi \varphi. \tag{60}$$

Entonces la función $\mathcal{W}$ debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\frac{1}{2m}\mathcal{W}'(r)^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2} = E. \tag{61}$$

Luego,

$$\mathcal{W}^\pm(r, E, p_\varphi) = \pm\sqrt{2m}\int_{r(E)}^{r} dr\,\sqrt{E - \frac{p_\varphi'^2}{2mr^2}}, \tag{62}$$

donde

$$p_\varphi'^2 = p_\varphi^2 + 2mk, \tag{63}$$

y $r(E)$ es el único punto de retorno. Finalmente,

$$W^\pm(r, \varphi, E, p_\varphi) = \mathcal{W}^\pm(r, E, p_\varphi) + p_\varphi \varphi. \tag{64}$$

La nueva coordenada Q_1, conjugada de E, es

$$Q_1^\pm = \frac{\partial W^\pm(r, \varphi, E, p_\varphi)}{\partial E} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{r(E)}^{r} \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{p_\varphi'^2}{2mr^2}}} = \pm\frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{Er^2 - \frac{p_\varphi'^2}{2m}}. \tag{65}$$

Por otro lado, la dinámica de $Q_1^\pm$ es trivial,

$$Q_1^\pm(t) = t - t_0^\pm. \tag{66}$$

Esto implica

$$r^\pm(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}\left(t - t_0^\pm\right)^2 + \frac{p_\varphi'^2}{2mE}}. \tag{67}$$

El signo de p_r está dado por el signo de $\dot{r}$, que a su vez está dado por el signo de $t - t_0^\pm$. Esto quiere decir que

$$r(t) = \begin{cases} r^-(t), & \text{si} \quad t \leqslant t_0^-, \\ \\ r^+(t), & \text{si} \quad t \geqslant t_0^+. \end{cases} \tag{68}$$

Para que la función $r(t)$ sea continua debe ser $t_0^- = t_0^+ \equiv t_0$. Esto significa que podemos escribir directamente

$$r(t) = \sqrt{\frac{2E}{m}(t - t_0)^2 + \frac{p_\varphi'^2}{2mE}}. \tag{69}$$

Además, para que esta función alcance su mínimo en $t = 0$, debe ser $t_0 = 0$. En definitiva,

$$r(t) = \sqrt{\frac{2Et^2}{m} + \frac{p_\varphi'^2}{2mE}}. \tag{70}$$

Para encontrar una relación entre r y φ, calculemos la nueva coordenada Q_2,

$$\begin{aligned} Q_2^{\pm} &= \frac{\partial W(r,\varphi,E,p_\varphi)}{\partial p_\varphi} = \varphi \mp \frac{p_\varphi}{\sqrt{2m}} \int_{r(E)}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - \dfrac{p_\varphi'^2}{2mr^2}}} \\ &= \varphi \pm \frac{p_\varphi}{p'_\varphi}\left[\arcsin\left(\frac{p'_\varphi}{\sqrt{2mE}\,r}\right) - \frac{\pi}{2}\right] = \varphi \mp \frac{p_\varphi}{p'_\varphi}\arccos\left(\frac{p'_\varphi}{\sqrt{2mE}\,r}\right). \end{aligned} \tag{71}$$

De aquí podemos despejar el radio como función del ángulo,

$$r^{\pm}(\varphi) = \frac{p'_\varphi}{\sqrt{2mE}} \frac{1}{\cos\left[\dfrac{p'_\varphi}{p_\varphi}\left(\varphi - Q_2^{\pm}\right)\right]}. \tag{72}$$

Podemos asumir que

$$0 \leqslant \frac{p'_\varphi}{p_\varphi} Q_2^{\pm} < 2\pi. \tag{73}$$

El signo de p_r está dado por el signo de $\dot{r}$, que a su vez está dado por el signo de

$$\frac{\dot{\varphi}}{p_\varphi} \sin\left[\frac{p'_\varphi}{p_\varphi}\left(\varphi - Q_2^{\pm}\right)\right]. \tag{74}$$

Pero el signo de $\dot{\varphi}$ es igual al signo de p_φ, de modo que el signo de p_r es igual al signo de

$$\sin\left[\frac{p'_\varphi}{p_\varphi}\left(\varphi - Q_2^{\pm}\right)\right]. \tag{75}$$

Esta función cambia de signo cuando $\varphi = Q_2^{\pm}$. Supongamos que $p_\varphi > 0$, entonces,

$$r(\varphi) = \begin{cases} r^{-}(\varphi), & \text{si} \quad Q_2^{-} - \frac{1}{2}\pi < \varphi \leqslant Q_2^{-}, \\ \\ r^{+}(\varphi), & \text{si} \quad Q_2^{+} \leqslant \varphi < Q_2^{+} + \frac{1}{2}\pi. \end{cases} \tag{76}$$

Para que esta función sea continua, debe ser $Q_2^{-} = Q_2^{+} \equiv Q_2$. Si $p < 0$, el argumento es similar, intercambiando r^{-} con r^{+}. En definitiva,

$$r(\varphi) = \frac{p'_\varphi}{\sqrt{2mE}} \frac{1}{\cos\left[\dfrac{p'_\varphi}{p_\varphi}(\varphi - Q_2)\right]}. \tag{77}$$

Para que el radio sea mínimo en $\varphi = 0$, podemos elegir $Q_2 = 0$, con lo que resulta

$$r(\varphi) = \frac{p'_\varphi}{\sqrt{2mE}} \frac{1}{\cos\left(\dfrac{p'_\varphi}{p_\varphi}\varphi\right)}. \tag{78}$$