Clase 02/11: TRANSFORMACIONES CANÓNICAS INFINITESIMALES

Vimos la transf. identidad

$$F_2(q, P, t) = \sum q_\nu P_\nu + \underbrace{\varepsilon\, G(q, P, t)}$$

$$\begin{cases} Q_\mu = \dfrac{\partial F_2}{\partial P_\mu} = q_\mu + \varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial P_\mu} \\ p = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_\mu} = P_\mu + \varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial q_\mu} \end{cases}$$

nos movemos $\varepsilon \ll 1$ de la identidad

a orden ε aproximamos $P \sim p$ en la función

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_\mu = q_\mu + \varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial p_\mu}(q, p, t) \\ P_\mu = p_\mu - \varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial q_\mu}(q, p, t) \end{cases}$$

si $H \neq H(t)$:

$$\delta H = \sum_\mu \left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu} \overset{Q_\mu - q_\mu}{\delta q_\mu} + \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \overset{P_\mu - p_\mu}{\delta p_\mu} \right)$$

$$= \varepsilon \sum_\mu \left(\frac{\partial H}{\partial q_\mu} \frac{\partial G}{\partial p_\mu} - \frac{\partial H}{\partial p_\mu} \frac{\partial G}{\partial q_\mu} \right) = \varepsilon\, [H, G]$$

$\Rightarrow$ transf. de simetría si $\delta H = 0 \Rightarrow \underbrace{[H, G] = 0}$
(dada por G.) infinitesimal

$\Rightarrow$ se conserva G. $\left(\text{si } \dfrac{\partial G}{\partial t} = 0 \right)$

$\boxed{\text{Noether}}$!

(12) (b) ⊛ Mostrar que si q_i cíclica $\Rightarrow$ la generatriz $G = p_i$ se asocia a dicha simetría

$$\begin{cases} Q_i = q_i + \varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial p_i} = q_i + \varepsilon \cancel{\dfrac{\partial p_i}{\partial p_i}}^{\,1} = q_i + \varepsilon \\ P_i = p_i - \varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial q_i} = p_i - \varepsilon \cancel{\dfrac{\partial p_i}{\partial q_i}}^{\,0} = p_i \end{cases}$$

q_i cíclica $\Rightarrow \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = 0$

es traslación espacial en $\boxed{\varepsilon = \delta q}$

$\Downarrow$

p_i es el generador de traslaciones

$\Rightarrow$ H queda igual, $\delta H = 0 \Rightarrow [H, p_i] = 0$

$\Rightarrow$ se conserva p_i

- otro Ejemplo: $G = L_z = x p_y - y p_x$

$(x, y) \rightarrow (x', y')$

$$\begin{cases} x' = x + \varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial p_x} = x - \varepsilon y \\ y' = y + \varepsilon \dfrac{\partial G}{\partial p_y} = y + \varepsilon x \end{cases}$$

Generador de rotación en $\hat{z}$

$\boxed{\varepsilon = \delta\theta}$

- si hay sim. de rotación $\rightarrow$ se conserva L_z.

- Generador de traslación temporal ? $G = H$

con $\boxed{\varepsilon = \delta t}$:

$$Q_i = q_i + \delta t \frac{\partial H}{\partial p_i} = q_i + \delta t \, \dot{q}_i$$

si hay sim. temporal, se conserva H

Evol temporal

también:

$$P_i = p_i - \delta t \frac{\partial H}{\partial q_i} = p_i + \delta t \, \dot{p}_i$$