# Mecánica Clásica Guía 2: Principios variacionales

Gonzalo Alvarez

Septiembre 2023

## Ejercicio 1

Para este resuelto con el fin de simetrizar las ecuaciones supongo que la partícula parte de $(-t_0, y_0)$ y cae hasta $(t_0, -y_0)$ lo que nos da el tiempo de caída del enunciado siendo $y_d = 2y_0$ y $t_d = 2t_0$ (para los resultados del enunciado se parte desde el origen).

La metodología general en este tipo de problemas es proponer una función o familia de funciones que dependen de ciertos parámetros, adecuarla para que cumpla las condiciones de borde y luego variar esos parámetros para encontrar el resultado de menor acción. Esto es útil para aproximar soluciones a partir de propuestas y en algunos casos encontrar la solución exacta del problema. En este caso, sabemos de las ecuaciones cinemáticas que el resultado es una parábola y es un caso sencillo para probar estas herramientas y ver que nos da el resultado esperado. Proponemos una función cuadrática $y(t) = a + bt + ct^2$. Esta propuesta debe cumplir los bordes del problema:

$$\begin{aligned} y(-t_0) &= y_0 = a - bt_0 + c{t_0}^2 \\ y(t_0) &= -y_0 = a + bt_0 + c{t_0}^2 \end{aligned}$$

Fácilmente, sumando y restando estas dos ecuaciones, podemos despejar dos de los parámetros

$$\begin{aligned} (+) &: 0 = 2a + 2c{t_0}^2 \\ (-) &: 2y_0 = -2bt_0 \end{aligned}$$

De esta forma, la propuesta depende de un único parámetro libre $c$:

$$y(t) = -\frac{y_0}{t_0}t + c(t^2 - {t_0}^2)$$

Hasta acá esto no fue más que reescribir una parábola de forma que pase por dos puntos deseados, pueden chequear que eso pasa.

Tenemos que conocer el Lagrangiano del sistema! En este caso es trivial resolver las ecuaciones de movimiento, pero este método es general para casos en los que incluso no exista una solución analítica. Para la caída libre tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\dot{y}(t)^2 - mgy(t) \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}m\left(-\frac{y_0}{t_0} + 2ct\right)^2 - mg\left[-\frac{y_0}{t_0}t + c(t^2 - {t_0}^2)\right] \end{aligned}$$

Queremos extremar la acción al variar el parámetro $c$:

$$S = \int \mathcal{L}\mathrm{d}t \implies \delta S = \delta\int \mathcal{L}\mathrm{d}t = \int \delta\mathcal{L}\mathrm{d}t = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}\delta c\ \mathrm{d}t = \left(\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}\mathrm{d}t\right)\delta c = 0$$

Disclaimers sobre sutilezas matemáticas:

- Los extremos de la integral están fijos y no dependen del parámetro variado, por lo tanto, uno puede permutar la integral por la variación de forma análoga que sucede al derivar (Leibniz integral rule).

- Variar una función es a fines prácticos como calcular un diferencial (considerando variaciones finitas) en términos del parámetro que me interesa. En este caso quiero ver como cambia la acción al variar mi parámetro libre, por lo expandiendo para un incremento pequeño:

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(c+\delta c) - \mathcal{L}(c) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}\delta c + \mathcal{O}\big(\delta c^2\big)$$

Calculemos esta derivada primero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = m\left(-\frac{y_0}{t_0} + 2ct\right)2t - mg\left(t^2 - {t_0}^2\right) = mt^2(4c-g) - 2m\frac{y_0}{t_0}t + mg{t_0}^2$$

Ahora solo queda integrar y podemos aprovechar el intervalo simétrico para matar el termino lineal (impar) y que nos quede dos veces los términos pares:

$$\delta S = \int_{-t_0}^{t_0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c}\mathrm{d}t\delta c = \int_{-t_0}^{t_0}\left[mt^2(4c-g) - 2m\frac{y_0}{t_0}t + mg{t_0}^2\right]\mathrm{d}t\delta c$$

$$\delta S = \int_0^{t_0} 2\left[mt^2(4c-g) + mg{t_0}^2\right]\mathrm{d}t\delta c = \left[\frac{2}{3}m{t_0}^3(4c-g) + 2mg{t_0}^3\right]\delta c$$

$$\delta S = m{t_0}^3\frac{4}{3}\left(2c+g\right)\delta c = 0 \implies \boxed{c = -\frac{1}{2}g}$$

Como la variación es arbitraria la forma en la que se extrema la acción es que el factor que acompaña sea nulo, por lo que recuperamos el resultado que esperábamos de cinemática:

$$y(t) = -\frac{y_0}{t_0}t - \frac{1}{2}g(t^2 - {t_0}^2)$$

# Problema extra: La braquistócrona

¿Cuál es la curva de descenso mas rápido en presencia de un campo gravitatorio constante? Buscamos minimizar el tiempo de caída del objeto entre dos puntos $A$ y $B$. Pensando que cada diferencial de trayecto viene dado por $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t$ podemos escribir el tiempo total como

$$t_{A\to B} = \int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{v}$$

Para parametrizar una curva podemos hacer el truco de manipular el diferencial de longitud en cartesianas de la siguiente forma:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

$$\mathrm{d}s = \mathrm{d}y\sqrt{\left(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y\right)^2 + 1} = \mathrm{d}y\sqrt{x'(y)^2 + 1}$$

Acá pueden elegir parametrizar con cualquiera de las dos variables dejando la otra como independiente, les muestro de esta forma como hice en clase pero es lo mismo. Además, de conservación de la energía podemos obtener la velocidad a medida que desciende:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \implies v = \sqrt{2gy}$$

Por lo tanto, reemplazando todo esto

$$t_{A\to B} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int\sqrt{\frac{x'(y)^2+1}{y}}\,\mathrm{d}y$$

donde podemos reconocer que este problema es análogo al problema mecánico de mínima acción. En este caso, queremos minimizar la funcional que toma posibles trayectorias que nos devuelve un tiempo de caída. Reconocemos la función que juega el rol de 'Lagrangiano':

$$f(x, x', y) = \sqrt{\frac{x'(y)^2+1}{y}}$$

Por lo que extremar el tiempo es encontrar la solución de Euler-Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)-\frac{\partial f}{\partial x}=0 \tag{1}$$

La función es cíclica en la variable $x$ por lo que tenemos una constante:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0 \implies \frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{2x'/y}{2\sqrt{\frac{x'2+1}{y}}}=\frac{x'}{\sqrt{y(x'^2+1)}}=\mathrm{cte}$$

Sabiendo la solución voy a elegir una constante de forma arbitraria definiendo un parámetro $a$ y manipular un poco la expresión

$$\begin{aligned}\frac{x'}{\sqrt{y(x'^2+1)}}&=\frac{1}{2a}\\ \frac{x'^2}{x'^2+1}&=\frac{y}{2a}=\dots\\ x'^2&=\frac{y}{2a-y}\\ x(y)&=\int\sqrt{\frac{y}{2a-y}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Para resolverla hay que hacer el siguiente cambio de variables $y=a(1-\cos\theta)$ (galerín) por lo que $\mathrm{d}y=a\sin\theta\mathrm{d}\theta$ y manipulando un poco la expresión...

$$\begin{aligned}x(\theta)=\int\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}a\sin\theta\mathrm{d}\theta&=a\int\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ &=a\int\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ &=a\int 1-\cos\theta\mathrm{d}\theta\\ &=a(\theta-\sin\theta)+\mathrm{cte}\end{aligned}$$

Obtuvimos la siguiente solución parametrizada por un ángulo:

$$\begin{cases}x(\theta) &=a(\theta-\sin\theta)\\ y(\theta) &=a(1-\cos\theta)\end{cases}$$

Esta es la curva Cicloide.