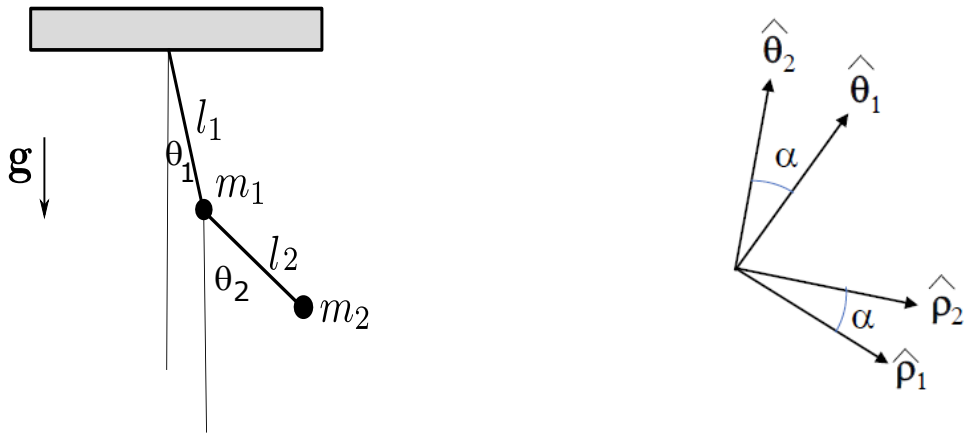
Mecánica Clásica - Problema 10 Guía 1
Péndulo Doble

Vladimir Daniel Rodríguez Chariarse

28 de agosto de 2023

Problema 10.



(a) *Coordenadas generalizadas.* **(b)** *Versores.*

Figura 1: *Coordendas generalizadas y versores.*

De la figura 1a se deduce que las masas $m_{1,2}$ poseen un movimiento plano. Las coordenadas elegidas para los dos grados de libertad del sistema son: θ_1, y θ_2.

La masa m_1 se mueve en órbita circular de radio fijo $\rho = l_1$, por lo que su velocidad en polares es:

$$v_1^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

la velocidad de la masa m_2 es la suma de la velocidad de m_1 mas la velocidad de m_2 con respecto a m_1

$$\mathbf{v_2} = l_1 \dot{\theta}_1 \hat{\theta}_\mathbf{1} + l_2 \dot{\theta}_2 \hat{\theta}_\mathbf{2}$$

y su cuadrado es:

$$v_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\hat{\theta}_{\mathbf{1}}\cdot\hat{\theta}_{\mathbf{2}}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2$$

donde se usó la figura 1b, y que $\alpha = \theta_2 - \theta_1$. La energía potencial de cada masa se calcula usando la coordenada vertical respectiva desde el punto de apoyo, obteniendose

$$V_1 = -m_1gl_1\cos(\theta_1) \quad V_2 = -m_2g(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_1))$$

uniendo estos resultados obtenemos el Lagrangiano del sistema:

$$\mathcal{L}(\theta_1,\theta_2,\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2) = \frac{m_1}{2}l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{2}\Big(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) + l_2^2\dot{\theta}_2^2\Big) + m_1gl_1\cos(\theta_1) + m_2g\big(l_1\cos(\theta_1) + l_2\cos(\theta_2)\big) \quad (1)$$

Las ecuaciones de Lagrange se calculan con paciencia y esmero:

Para θ_1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1} &= m_1l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2\Big(l_1^2\dot{\theta}_1 + l_1l_2\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2\Big)\\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_1}\Big) &= (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 - m_2l_1l_2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) \quad (2)\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} &= m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_1) - (m_1+m_2)gl_1\sin(\theta_1)
\end{aligned}$$

Obteniendose la ecuación de Lagrange para θ_1:

$$(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 - m_2l_1l_2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) = -(m_1+m_2)gl_1\sin(\theta_1) \quad (3)$$

Para θ_2:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2} &= m_2l_1l_2\cos(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1 + m_2l_2^2\dot{\theta}_2\\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}_2}\Big) &= m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1) - m_2l_1l_2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1) + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 \quad (4)\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2} &= -m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_1) - m_2gl_2\sin(\theta_2)
\end{aligned}$$

Obteniendose la ecuación de Lagrange para θ_2:

$$m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1) + m_2l_1l_2\sin(\theta_2-\theta_1)\dot{\theta}_1^2 + m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 = -m_2gl_2\sin(\theta_2) \quad (5)$$

Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio estable

Observemos que el equilibrio estable para este problema está dado por: $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Para pequeños apartamientos del equilibrio linealizamos las ecuaciones de Lagrange alrededor de valores: $\theta_1 \sim 0$, $\theta_2 \sim 0$, $\dot{\theta}_1 \sim 0$, $\dot{\theta}_2 \sim 0$. Las velocidades son también pequeñas pues la energía del sistema está solamente un poco por arriba del valor mínimo. Usando $sin(\theta_1) \sim \theta_1$, $\sin(\theta_2 - \theta_1) \sim \theta_2 - \theta_1$, $\cos(\theta_2 - \theta_1) \sim 1$ a primer orden, además de despreciar los términos de segundo orden: $\dot{\theta}_1^2$, $\dot{\theta}_2^2$ y $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$, obtenemos las ecuaciones linealizadas:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 &= -(m_1 + m_2)g l_1 \theta_1 \\ m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \ + \ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 &= -m_2 g l_2 \theta_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Definiendo:

$$\vec{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -(m_1 + m_2)g l_1 & 0 \\ 0 & -m_2 g l_2 \end{pmatrix}.$$

el sistema lineal se escribe en forma vectorial:

$$T\ddot{\vec{\theta}} = -V\vec{\theta}$$

Proponiendo soluciones armónicas: $\vec{\theta} = \vec{a}e^{i\omega t}$ (se toma la parte real al final), la segunda derivada temporal es $\ddot{\vec{\theta}} = -\omega^2\vec{\theta}$, obteniendo la ecuación de autovalores generalizada:

$$V\vec{a} = \omega^2 T\vec{a}$$

El sistema de ecuaciones tiene solución no trivial si $|V - \omega^2 T| = 0$ lo cual es una ecuación de segundo grado para ω^2, cuyas dos soluciones positivas dan las denominadas frecuencias de oscilación normales, y los autovectores $\vec{a}$ asociados son denominados modos normales de oscilación.

Para el caso de dos péndulos iguales: $m_1 = m_2 = m$ y $l_1 = l_2 = l$ se obtiene:

$$\omega_\pm = (2 \pm \sqrt{2})\frac{g}{l}$$

y los autovectores son:

$$\vec{a}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

El movimiento mas general es una combinación lineal de las soluciones:

$$\vec{\theta}(t) = A_+\vec{a}_+ e^{i\omega_+ t} + A_-\vec{a}_+ e^{i\omega_- t}$$

tomado la parte real:

$$\vec{\theta}(t) = \alpha_+\vec{a}_+ \cos(\omega_+ t + \phi_+) + \alpha_-\vec{a}_- \cos(\omega_- t + \phi_-)$$

Esta solución depende de cuatro constantes arbitrarias que son definidas por las condiciones iniciales del problema. Para la condición inicial $\theta_1 = \theta_2 = 0$ las fases son $\phi_+ = \phi_- = -\pi/2$, por lo que

$$\vec{\theta}(t) = \alpha_+ \vec{a}_+ \sin(\omega_+ t) + \alpha_- \vec{a}_- \sin(\omega_- t)$$

la condición de resposo a $t = 0$ de la masa m_1 nos provee la relación que existe entre las amplitudes $\alpha_\pm$

$$\dot{\theta}_1(0) = \omega_+ \alpha_+ + \omega_- \alpha_- = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_+ = -(\sqrt{2} - 1)\alpha_-$$

la presencia del modo de menor frecuencia es casi el doble que el de mayor frecuencia. Falta determinar una amplitud global que es dada por $\dot{\theta}_2(0)$.

Tensiones en los hilos

Veamos s la figura 1b para relacionar lo versores polares de ambas partículas:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{2}} &= \quad \cos(\theta_2 - \theta_1)\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{1}} + \sin(\theta_2 - \theta_1)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{2}} &= -\sin(\theta_2 - \theta_1)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1}} + \cos(\theta_2 - \theta_1)\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{1}} \end{aligned} \tag{7}$$

Usando Newton para m_1:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}} = \mathbf{F}_{\mathbf{1}}$$

necesitaremos:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}} = l_1 \ddot{\theta}_1 \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1}} - l_1 \dot{\theta}_1^2 \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{1}}$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{1}} = -T_1 \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{1}} + T_2 \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{2}} + m_1 g \sin(\theta_2 - \theta_1)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1}} - m_1 g \cos(\theta_2 - \theta_1)\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{1}}$$

donde el peso de m_1 está en componentes $\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{1}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{1}}$, y $T_{1,2}$ son las tensiones. Con estas tres ecuaciones a mano es relativamente simple obtener las tensiones en función de aceleraciones, velocidades y coordenadas. Finalmente reemplazando las aceleraciones obtenidas der las ecuaciones de Lagrange se obtienen las tensiones en función de velocidades y coordenadas generalizadas. No es necesario escribir una expresión explícita.