Guía 0: Ecuaciones de Newton. Fuerzas de vínculo. Leyes de conservación. Coordenadas curvilíneas.

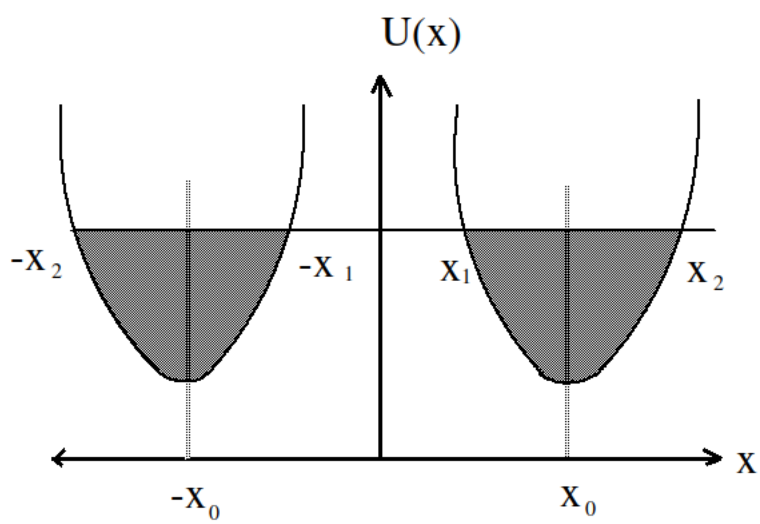
Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh

Problema 1: Una partícula está sometida a una fuerza $F(x) = -kx + a/x^3$, con k y a mayores que cero.
a) Hallar el potencial $U(x)$. Discutir los tipos de movimiento posibles. Hallar las posiciones de equilibrio estable y encontrar la solución general $x(t)$.
b) Interpretar el movimiento en el límite $E^2 \gg ka$. ¿Cuánto vale el período de las oscilaciones?
c) Interpretar el movimiento en el límite $E^2 \to ka$ cuando $E^2 > ka$. ¿Cuánto vale el período de las oscilaciones?
d)¿Cuánto vale el período de las oscilaciones para cualquier valor de E?

Solución: **a)** Sabemos que la fuerza deriva de un potencial:

$$F(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x} \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\frac{a}{x^2} \tag{1}$$

Dado que el potencial está definido a menos de una constante, la elegimos igual a cero.



En los mínimos de $U(x)$ se cumple que $U(\pm x_0) = U_0$, del gráfico se observa que son puntos de equilibrio estable, así que deben cumplir con $F(\pm x_0) = 0$. De esta manera obtenemos $\pm x_0$:

$$kx_0 = \frac{a}{x_0^3} \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt[4]{\frac{a}{k}} \tag{2}$$

Es fácil notar que $x = 0$ marca el límite entre dos regiones no conexas. En el gráfico trazamos una línea horizontal, esto corresponde a un valor dado de energía $E = T + U$. Debajo de ésta se ven zonas sombreadas, corresponden a los estados físicos pertimidos y se tienen órbitas cerradas. Los puntos $\{-x_2, -x_1, x_1, x_2\}$ son puntos de retorno porque allí $T = 0$.

Falta obtener $x(t)$, para ello tomamos la expresión de la energía:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}\frac{a}{x^2} \tag{3}$$

despejamos la velocidad e integramos recordando que $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$:

$$\int_{t_i}^{t} dt = \pm \int_{x_i}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}\frac{a}{x^2}\right)}} \tag{4}$$

Falta resolver la integral y ya está.

b) Cuando $E^2 >> ak$, quiere decir que la parte cinética se vuelve mas relevante que el potencial al que se encuentra sometido la partícula. Se observa que los puntos de retorno $-x_1$ y x_1 se aproximan a $x = 0$ teniendo en ese lugar una barrera infinita, infinitamente angosta.

Planteando la condición de que es un punto de retorno, tenemos:

$$x^4 - 2\frac{E}{k} + \frac{a}{k} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{E}{k} \pm \sqrt{\frac{E^2 - ak}{k^2}}} \tag{5}$$

En el límite propuesto:

$$x \approx \pm\sqrt{\frac{E}{k} \pm \frac{E}{k}} \tag{6}$$

Esto es, se tienen como soluciones, $x = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}$ y $x = 0$ doblemente degenerado.

Eventualmente, la barrera se podría "romper" introduciendo una pequeña perturbación en $U(x)$.

c) Le toca el turno al régimen de bajas energías...
cerca del mínimo de potencial, se obtienen soluciones del tipo de oscilador armónico, para ello planteamos una perturbación del tipo.

$$x = x_0 + \delta x \tag{7}$$

y se lo reemplaza en la ecuación de la fuerza:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x - \frac{a}{mx^3} = 0 \tag{8}$$

$$\delta\ddot{x} + \frac{k}{m}x_0 + \frac{k}{m}\delta x - \frac{a}{m(x + \delta x)^3} = 0 \tag{9}$$

Definiendo $\epsilon = \dfrac{\delta x}{x_0} << 1$ y del hecho que

$$(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon + \frac{n}{2}(n - 1)\epsilon^2 \tag{10}$$

llegamos a:

$$\boxed{\delta\ddot{x} + \frac{k}{m}x_0(1 + \epsilon) - \frac{a}{mx_0^3}(1 - 3\epsilon) = 0} \tag{11}$$

Para tener efectivamente un oscilador armónico el término de orden cero debe ser nulo:

$$\frac{kx_0}{m} = \frac{a}{mx_0^3} \tag{12}$$

De esta manera se obtiene:

$$\delta\ddot{x} + \omega^2 \delta x = 0 \tag{13}$$

Donde $\omega \equiv 2\omega_0 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$, esto es que la corrección a/x^3 en el potencial, hace que el oscilador duplique la frecuencia natural del oscilador armónico.

El período es inmediato.

El item que falta no lo resuelvo yo.