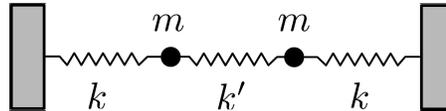


## Guía 1: Coordenadas generalizadas. Grados de libertad. Lagrange.

*Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a [carlosv@df.uba.ar](mailto:carlosv@df.uba.ar), gracias. Carlos Vigh*

**Problema 1:** Se tiene el sistema de la figura, donde  $x_1, x_2$  se miden a partir de las posiciones de equilibrio. Sea  $q_1 = x_1 + x_2$  y  $q_2 = x_1 - x_2$ .

- Definen  $(q_1, q_2)$  un conjunto admisible de coordenadas generalizadas?.
- Si  $q_1 = 0$ , describa cualitativamente el movimiento de cada partícula. Idem si  $q_2 = 0$ .
- Calcular las fuerzas generalizadas  $Q_1$  y  $Q_2$ .



### Solución:

a) Es un problema unidimensional, por lo que tiene dos grados de libertad. Esto se puede calcular de la relación:

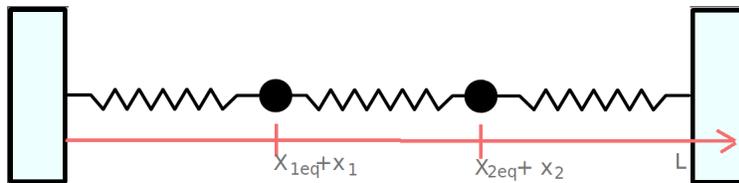
$$S = 3N - K \quad (1)$$

donde  $N$  es el número de partículas,  $K$  el número de vínculos y  $S$  el número de grados de libertad. Dado que cada partícula tiene dos vínculos por ser unidimensional, quiere decir que  $S = 2$ .

Se usa una coordenada por cada grado de libertad. En este caso  $x_1, x_2$ . Para que  $q_1, q_2$  sea un conjunto admisible de coordenadas deben describir el problema equivalente en forma mas sencilla desacoplando las ecuaciones de movimiento constituyendo un conjunto linealmente independiente.

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha(x_1 + x_2) + \beta(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)x_1 + (\alpha - \beta)x_2 = 0, \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

b) Primero hay que obtener las ecuaciones de movimiento. Lo vamos a resolver de tres maneras distintas:



**Forma 1:** Utilizando las ecuaciones de Newton:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_{1,eq} + x_1 - \ell_0) + k'(x_{2,eq} + x_2 - x_{1,eq} - x_1 - \ell'_0)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) - k(x_{1,eq} - \ell_0) + k'(x_{2,eq} - x_{1,eq} - \ell'_0)$$

$$\text{Si } \ddot{x}_1|_{x_{1,eq}} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow k(x_{1,eq} - \ell_0) = k'(x_{2,eq} - x_{1,eq} - \ell'_0)$$

Entonces

$$m_1 \ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \quad (2)$$

Analogamente:

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(L - x_{2,eq} - x_2 - \ell_0) - k'(x_{2,eq} + x_2 - x_{1,eq} - x_1 - \ell'_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \end{cases} \quad (3)$$

Si se suman ambas ecuaciones miembro a miembro, los términos en “azul” se cancelan pues corresponden a fuerzas internas si pensamos a las dos partículas como parte de un mismo sistema.

$$\text{Usando el cambio de variables : } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \Rightarrow \ddot{x}_1 = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \Rightarrow \ddot{x}_2 = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = -k(q_1 - q_2) + k'(-2q_2) \\ m_2(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = -k(q_1 + q_2) - k'(-2q_2) \end{cases} \quad (5)$$

Sumando y restando, en el caso  $m_1 = m_2 \equiv m$ :

$$m\ddot{q}_1 = kq_1 \quad (6)$$

$$m\ddot{q}_2 = (k + 2k')q_2 \quad (7)$$

Proponiendo soluciones de tipo oscilador armónico se tienen dos frecuencias:

$$\omega_1 = \frac{k}{m} \quad (8)$$

$$\omega_2 = \frac{k + 2k'}{m} \quad (9)$$

Si  $q_1 = 0$  queda  $x_1 = -x_2$ , se tienen modos en contrafase con frecuencia  $\omega_2$

Si  $q_2 = 0$  queda  $x_1 = x_2$ , se tienen modos en fase con frecuencia  $\omega_1$

**Forma 2:** Usando el principio de los *Trabajos Virtuales*:

Haber tomado el equilibrio según la **Forma 1** es equivalente a eliminar todos los vínculos.

$$[m_1 \ddot{x}_1 + kx_1 - k'(x_2 - x_1)]\delta x_1 + [m_2 \ddot{x}_2 + kx_2 + k'(x_2 - x_1)]\delta x_2 = 0 \quad (10)$$

Si se hace el cambio de variables y reagrupa los términos queda:

$$[m_1 \ddot{q}_1 + kq_1]\delta q_1 + [m_2 \ddot{q}_2 + kq_2 + 2k'q_2]\delta q_2 = 0 \quad (11)$$

Dado que es un sistema linealmente independiente reobtenemos la solución correspondiente a las ecuaciones [??] y [??].

**Forma 3:** Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

Para resolverlo de esta manera es necesario escribir explícitamente la energía cinética y la potencial elástica del sistema.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \quad ; \quad V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 \quad (12)$$

Con esto podemos construir el lagrangiano  $L = T - V$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 \quad (13)$$

Reescrito en términos de las coordenadas generalizadas  $q_1$  y  $q_2$  queda:

$$L = \frac{1}{2}m \left[ \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{q}_2^2 \right] - \frac{1}{2}k \left[ \frac{1}{2}q_1^2 + \frac{1}{2}q_2^2 \right] - \frac{1}{2}k'q_2^2 \quad (14)$$

Una vez obtenido el lagrangiano en la forma deseada se pueden escribir las ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (15)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}m\ddot{q}_1 + \frac{1}{2}kq_1 = 0 \\ \frac{1}{2}m\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}kq_2 + k'q_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Como debe ser se reobienen las ecuaciones [??] y [??].

c) La fuerza generalizada es de la forma:  $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$  y queda una fuerza independiente de la coordenada  $q_i$

$$Q_i = F_i \frac{\partial x_1}{\partial q_i} + F_i \frac{\partial x_2}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (17)$$

$$m_1\ddot{q}_1 = -\frac{1}{2}kq_1 \quad (18)$$

$$m_2\ddot{q}_2 = -\frac{1}{2}(k + 2k')q_2 \quad (19)$$