...onus:

...n la parte a : las otras ecuaciones de Hamilton son:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{1}{m}\left(p_x + \frac{1}{2} m\omega y\right) \quad ; \quad \dot{p}_x = \frac{1}{2}\omega\left(p_y - \frac{1}{2} m\omega x\right)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\left(p_y - \frac{1}{2} m\omega x\right) \quad ; \quad \dot{p}_y = -\frac{1}{2}\omega\left(p_x + \frac{1}{2} m\omega y\right)$$

...) En la parte b no me conviene pensar que se puede restar L_z y p_z pues el hamiltoniano queda:

$$H' = \frac{1}{2}\frac{\omega}{m}\left(P_1 + \frac{1}{2}P_2^2 + \frac{1}{2}Q_2^2\right)$$ y se pierde la belleza del problema

* Las transformaciones propuestas en un sentido separan variables al estilo Hamilton-Jacobi: y simplifican el hamiltoniano haciendolo cíclico en Q_1 y Q_2 siendo estas variables del tipo ángulo-acción

* Falta empalmar ya sea con c.i. adecuadas o por analogía las ctes de las soluciones entre la parte a y la parte b

* Se puede hacer el diagrama de fases (idem ej 1)

* Colaboraciones se agradecen

LJA

2_ Una partícula de masa m se mueve en el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} A\left[a^2 - (x-a)^2\right] & ; \text{ si } 0 \leq x \leq 2a \quad (A>0) \\ 0 & ; \text{ si } x \geq 2a \end{cases}$$

y choca elásticamente con la pared en $x=0$. Construir el diagrama de fases correspondiente, mostrando claramente las regiones de libración y movimiento no acotado. Muestre que la variable de acción para el movimiento de libración es:

$$J = \frac{a^2\sqrt{2mA}}{2\pi}\left[\varepsilon - \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2)\,\ln\left[\frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)}\right]\right]$$

si la energía es $E = \varepsilon^2 a^2 A$ $(\varepsilon < 1)$ y que el período de libración es $\tau = 2\pi \frac{dJ}{dE}$ y que si $\varepsilon \to 1$, $\tau \to \infty$

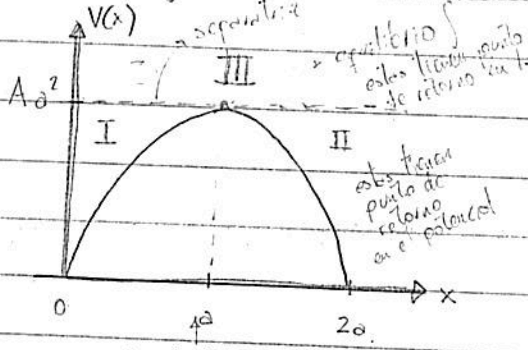
Advertencia: contiene escenas no convenientes para matemáticos.

Procedamos a escribir el Hamiltoniano:

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + A\left[a^2 - (x-a)^2\right] & \text{si } 0 \leq x \leq 2a \\ \frac{p^2}{2m} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

como no hay dependencia explícita con el tiempo, $H = E$

Analicemos los gráficos: → cuando pasemos al espacio xp

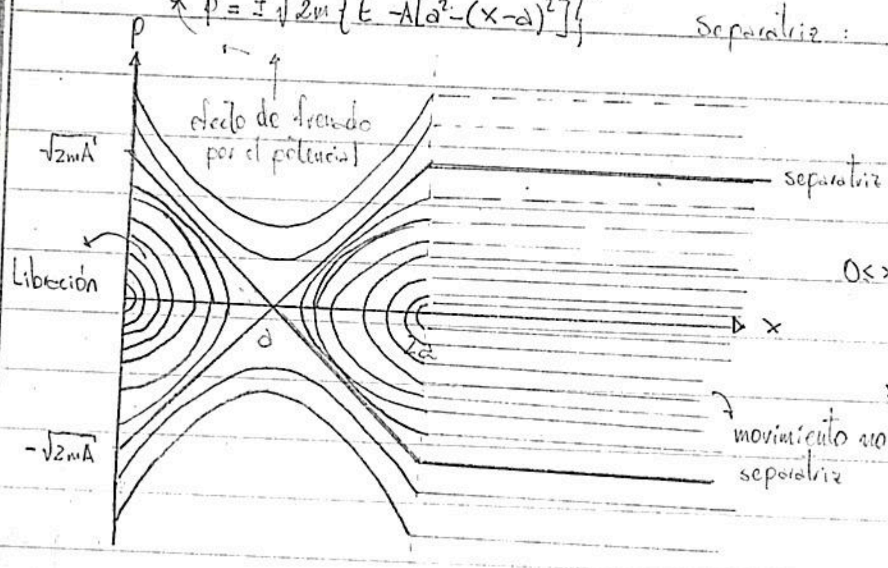


el potencial es como una loma de altura Aa^2 que para valores de energía menores a esto divide al espacio en 3 regiones: I, movimiento ligado; II, movimiento no acotado y III: movimiento no acotado en todo el espacio

$$p = \pm\sqrt{2m\left\{E - A\left[a^2 - (x-a)^2\right]\right\}}$$

Separatriz: Si $E = Aa^2 \Rightarrow p = \pm\sqrt{2mA}\,|x-a|$, $0 \leq x \leq 2a$

$p = \pm\sqrt{2mA}\,a$; $x > 2a$



Libración: $E = Aa^2 - \gamma^2$ (γ = cte)

$0 < x < 2a$ $\quad p = \pm\sqrt{2m\left\{Aa^2 - \gamma^2 - Aa^2 + (x-a)^2\right\}}$

$p = \pm\sqrt{2m}\sqrt{(x-a)^2 - \gamma^2}$

$x > 2a$ $\quad p = \pm\sqrt{2m(Aa^2 - \gamma^2)}$

Ojo: para tener libración no alcanza con $E < Aa^2$; tengo que ver los puntos de equilibrio para $x \geq a$ tengo movimiento no acotado para todo valor de E

Si $E = Aa^2 + \gamma^2$

$p = \pm\sqrt{2m\left\{\gamma^2 + (x-a)^2\right\}}$ si $0 < x < 2a$

$p = \pm\sqrt{2m(Aa^2 + \gamma^2)}$ si $x \geq 2a$

Vamos a por la variable de acción:

$E = \varepsilon^2 a^2 A$ donde $\varepsilon < 1$

$$J = \frac{1}{2\pi}\oint p\, dx = \frac{2}{2\pi}\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{2mA\left[\varepsilon^2 a^2 - a^2 + (x-a)^2\right]}\, dx = \frac{\sqrt{2mA}}{\pi}\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(x-a)^2 + a^2(\varepsilon^2-1)}\, dx$$

Los límites de integración se calculan a partir de la separatriz:

$$(x-a)^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$$

$$x - a = a\sqrt{1-\varepsilon^2} \Rightarrow x = a\left(1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}\right) \qquad (x \geq a)$$

$$x - a = -a\sqrt{1-\varepsilon^2} \Rightarrow x = a\left(1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}\right) \qquad (x \leq a)$$

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$; $x_1 = a\left(1 - \sqrt{1-\varepsilon^2}\right)$

en este caso por la presencia de la pared.

$$J = \frac{\sqrt{2mA}}{\pi}\int_0^{a(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})} \sqrt{(x-a)^2 + a^2(\varepsilon^2-1)}\, dx$$

Hago el cambio de variables: $u = x - a$; $du = dx$

$\cancel{a} - a\sqrt{1-\varepsilon^2}$

$\cancel{0} - a$

$$J = \frac{\sqrt{2mA}}{\pi}\int_{-a}^{-a\sqrt{1-\varepsilon^2}} \sqrt{u^2 + a^2(\varepsilon^2-1)}\, du$$

Uso la identidad:

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln\left[x + \sqrt{x^2+a^2}\right]}$$

$$\Rightarrow J = \frac{\sqrt{2mA}}{\pi}\left\{\frac{1}{2} u\sqrt{u^2+a^2(\varepsilon^2-1)} + \frac{a^2}{2}(\varepsilon^2-1)\ln\left[u + \sqrt{u^2+a^2(\varepsilon^2-1)}\right]\right\}\Bigg|_{-a}^{-a\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$J = \frac{\sqrt{2mA}}{2\pi}\left\{-a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sqrt{a^2(1-\varepsilon^2)+a^2(\varepsilon^2-1)} + a\sqrt{a^2+a^2(\varepsilon^2-1)} + a^2(\varepsilon^2-1)\ln\left[-a\sqrt{1-\varepsilon^2} + \sqrt{a^2(1-\varepsilon^2)+a^2(\varepsilon^2-1)}\right]\right.$$
$$\left. - a^2(\varepsilon^2-1)\ln\left[-a + \sqrt{a^2+a^2(\varepsilon^2-1)}\right]\right\}$$

$$J = \frac{\sqrt{2mA}}{2\pi}\left\{a^2\varepsilon + (\varepsilon^2-1)a^2\ln\left[\frac{-a\sqrt{1-\varepsilon^2}}{-a+a\varepsilon}\right]\right\}$$

$$J = \frac{\sqrt{2mA}}{2\pi} a^2 \left\{ \varepsilon + (\varepsilon^2 - 1) \ln\left[\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon}\right] \right\} = \frac{\sqrt{2mA}}{2\pi} a^2 \left\{ \varepsilon - \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2) \ln\left[\frac{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon)}\right] \right\}$$

$$\downarrow \; \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}}$$

$$\boxed{J = \frac{\sqrt{2mA}}{2\pi} a^2 \left\{ \varepsilon - \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2) \ln\left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] \right\}}$$

$$\ln x^{1/2} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\tau = 2\pi \frac{dJ}{dE}$$

$$E = \varepsilon^2 a^2 A \Rightarrow \boxed{dE = 2\varepsilon a^2 A\, d\varepsilon}$$

$$\tau = \frac{\pi}{\varepsilon a^2 A} \frac{dJ}{d\varepsilon}$$

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = \frac{\sqrt{2mA}}{2\pi} a^2 \left\{ 1 + \varepsilon \ln\left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] - \frac{1}{2}(1-\varepsilon^2) \frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)} \cdot \left\{ \frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2} \right\} \right\}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{2A}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \ln\left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] - \frac{1}{2}\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \right\}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{2A}} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \ln\left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] - \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \right\}$$

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{m}{2A}} \ln\left[\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right] \qquad \text{si } \varepsilon \to 1 \Rightarrow \tau \to \infty}$$

A medida que E tiende a la trayectoria de la separatriz, el período para recorrerla en ese límite es de período infinito.

10. Una partícula de masa m se mueve en el potencial

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} m \lambda^2 (x+a)^2 & ; \; x \leq 0 \\ \frac{1}{2} m \lambda^2 (x-a)^2 & ; \; x \geq 0 \end{cases}$$

a. Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya los diagramas de fases, considerando especialmente las curvas de fases próximas al origen.

b. Muestre que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, y en cada una se definen distintas variables de ángulo-acción. Halle la variable de acción en función de la energía E en cada caso.