**Guía 2: Principios variacionales y simetrías**

*Nota: Los problemas se explican en forma esquemática adrede para que se realice una lectura crítica y de elaboración personal. Sin embargo, si encuentra uno o varios errores por favor escríbame a carlosv@df.uba.ar, gracias. Carlos Vigh*

**Problema 5:** Según el principio de Fermat, la luz sigue una trayectoria que hace extrema la integral $\int_1^2 n(x,y)\,ds$, donde $n(x,y)$ es el índice de refracción del medio que la luz atraviesa. El problema se supone bidimensional. Muestre que si $n(x,y) = n_0(1 + y/h)$, donde $n_0$ y $h$ son constantes, la trayectoria de la luz está dada por $y = -h + (\alpha h/n_0)\cosh(\beta + n_0 x/h\alpha)$; $\alpha$ y $\beta$ constantes de integración. *Ayuda: considere las ecuaciones de Euler–Lagrange.*

**Solución:**

Básicamente extremaremos los caminos ópticos a extremar su lagrangiano equivalente.

$$\int_{p_1}^{p_2} n(x,y)ds = \int_{p_1}^{p_2} n_o\left(1+\frac{y}{h}\right)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\;dt = \int_{p_1}^{p_2} L(x,y,\dot{x},\dot{y},t)dt$$

Por lo tanto se puede resolver utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = n_o\left(1+\frac{y}{h}\right)\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \alpha$$

siendo $\alpha$ una constante.

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{n_o}{h}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\alpha$$

De esta forma se llega a la ecuación de movimiento:

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) - \frac{n_o}{h}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 0 \tag{1}$$

Notar que $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{dy}{dx} \equiv y'$ y queda:

$$\frac{d(\alpha y')}{dx} - \frac{n_o}{h}\sqrt{1+y'^2} = 0 \tag{2}$$

Aquí se puede integrar $x$ e $y'$ separando variables se llega a:

$$y' = \operatorname{senh}\left(\beta + \frac{n_o x}{\alpha h}\right) \tag{3}$$

con $\beta$ constante. Se integra en $x$ para obtener $y$:

$$y = A + \frac{\alpha h}{n_o}\cosh\left(\beta + \frac{n_o x}{\alpha h}\right) \tag{4}$$

siendo $A$ una constante. Volvemos a la expresión de la constante de movimiento un poco reescrita:

$$n_o\left(1+\frac{y}{h}\right)\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha \tag{5}$$

En este momento se reemplaza las expresiones para $y$ e $y'$ y se tiene en cuenta que:

$$\cosh^2\psi - \operatorname{senh}^2\psi = 1$$

obteniendo que $A = -h$ y solo resta escribir la respuesta.