Una partícula cargada de masa m y carga q se mueve en el plano $x-y$ con velocidad paralela al eje $\hat{x}$, e ingresa a una región $x \geq x_0$ sujeta a un campo magnético $\mathbf{B} = B_0\hat{z}$. Se realiza una medición y se establece que la partícula va del punto (x_0, y_0) a $(x_0, y_0 - 2R)$ en un tiempo $\Delta t = \frac{\pi}{\omega}$, siendo $\omega = \frac{qB_0}{m}$.

Variacionales

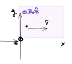
(a) Proponga la siguiente familia de trayectorias:

$$x(t) = a\sin(\omega t) + c$$
$$y(t) = b\cos(\omega t) + d$$

Empleando el *gauge de Landau*: $\mathbf{A} = B_0 x\hat{y}$ use el principio variacional de Hamilton para determinar los parámetros propuestos. No se olvide de imponer las condiciones iniciales y finales.

(b) ¿A qué curva corresponde la solución propuesta?. Verifique que su solución es exacta resolviendo las ecuaciones de Lagrange (Problema 19a de la Guía 1) con condiciones iniciales apropiadas.

Planteo inicial del ejercicio



$x_0 = a\sin(\overset{0}{\omega t_0}) + c \rightarrow \boxed{c = x_0}$

$\begin{cases} y_0 = b + d \\ y_0 - 2R = -b + d \end{cases}$

$2R = 2b$, $\boxed{R = b}$, $2(y_0 - R) = 2d$, $\boxed{d = y_0 - R}$ $\Longrightarrow$ $x = a\sin(\omega t) + x_0$, $y = R\cos(\omega t) + y_0 - R$

Resolución del problema

a) $I = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)\,dt$

$\dot{x} = a\omega\cos(\omega t)$

$\dot{y} = -R\omega\sin(\omega t)$

$T = \frac{1}{2}\omega^2(a^2\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)R^2)m$

$U = q(\varphi - \frac{\vec{V}\cdot\vec{A}}{c}) \underset{\text{solo } B}{=} -q\frac{\vec{V}\cdot\vec{A}}{c} = -\frac{q}{c}\dot{y}B_0 x = -\frac{q}{c}B_0(-R\omega\sin(\omega t))(a\sin(\omega t) + x_0) =$

$\bar{A} = B_0 x\hat{y}$

$$I = \frac{1}{2}\omega^2 m\int_0^{\pi/\omega}(a^2\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)R^2)\,dt + \frac{q}{c}B_0 R\omega\int_0^{\pi/\omega} a\sin^2(\omega t) + \sin(\omega t)x_0\,dt$$

i) $\int_0^{\pi/\omega}\sin^2(\omega t)\,dt = \frac{\pi}{2\omega}$

ii) $\int_0^{\pi/\omega}\cos^2(\omega t)\,dt = \frac{\pi}{2\omega}$

iii) $\int_0^{\pi/\omega}\sin(\omega t) = \frac{2}{\omega}$

$$\Longrightarrow = \frac{1}{2}\omega^2 m\left(\frac{\pi}{2\omega}a^2 + \frac{\pi}{2\omega}R^2\right) + \frac{q}{c}B_0 R\omega\left(a\frac{\pi}{2\omega} + x_0\frac{2}{\omega}\right)$$

$$\boxed{I = m\frac{\omega}{4}\pi(a^2 + R^2) + \frac{q}{c}B_0 R\left(\frac{a\pi}{2} + x_0 2\right)}$$

Por el principio de Hamilton

$\delta I = \frac{dI}{da}\delta a = 0$

$\frac{\partial I}{\partial a} = 0 = \frac{m\omega\pi}{2}a + \frac{qB_0R\pi}{c\,2}$

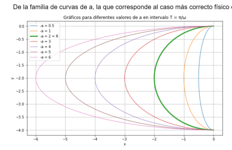
$\boxed{a = -\frac{qB_0R}{\omega c m} = -\frac{qB_0 R\, mc}{qB_0\, cm} = -R}$

$\frac{qB_0}{mc} = \omega$ por el sistema de unidades gaussiano que voy a utilizar

$x = -R\sin(\omega t) + x_0$

$y = R(\cos(\omega t) - 1) + y_0$

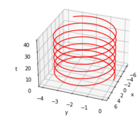
De la familia de curvas de a, la que corresponde al caso más correcto físico es cuando -a=R=b



b) la solución propuesta corresponde a hélices circulares. En el intervalo de tiempo establecido, no alcanza a dar una vuelta la hélice, pero si probamos ampliar el intervalo se obtiene:

Movimiento cualitativo para intervalo establecido

Movimiento cualitativo para intervalo mayor de tiempo



En el ejercicio 19 de la guía 1 se tuvieron los siguientes resultados:

$x = -\frac{A}{\omega}\cos(\omega t + \varphi) + c_1 \xrightarrow{t=0} x_0 = -\frac{A}{\omega}\cos(\varphi) + c_1$

$\xrightarrow{t=\pi/\omega} x_0 = -\frac{A}{\omega}\cos(\pi + \varphi) + c_1$

$0 = \cos(\varphi) - \cos(\pi + \varphi)$

$\cos(\varphi) = \cos(\pi + \varphi)$

$y = \frac{A}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + c_2$

$(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = \frac{A^2}{\omega^2}$

$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$ elijo este valor sin perdida de generalidad

$x = -\frac{A}{\omega}\sin(\omega t) + c_1 \xrightarrow{t=0} \boxed{x_0 = c_1}$

$y = \frac{A}{\omega}\cos(\omega t) + c_2 \xrightarrow{t=0} c_2 = y_0 - \frac{A}{\omega}$

$\xrightarrow{t=\pi/\omega} c_2 = y_0 - 2R + \frac{A}{\omega}$

$0 = -\frac{2A}{\omega} + 2R$

$\boxed{R = \frac{A}{\omega}}$

$\boxed{c_2 = y_0 - R}$

por lo tanto de las soluciones exactas con las condiciones iniciales establecidas se obtienen las mismas ec de movimiento

$\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} x &= -R\sin(\omega t) + x_0 \\ y &= R\cos(\omega t) + y_0 - R \end{aligned}}$

Simetrías 1

(c) Escriba el Lagrangiano del problema usando el *gauge simétrico*: $\mathbf{A} = \frac{B_0}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$.

(d) Verifique que la transformación de coordenadas (rotación en θ alrededor del eje z)

$$x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$$
$$y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta)$$

es una transformación de simetría del Lagrangiano.

(e) Considere la transformación infinitesimal $\theta = \epsilon$ (a primer orden en ϵ). Use el teorema de Nöther para determinar la magnitud conservada. Interprete separando la parte mecánica de la parte magnética.

c) $A = \frac{B_0}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$

$U = -q\frac{\vec{V}\cdot\vec{A}}{c} = -\frac{q}{c}\frac{B_0}{2}(-y\dot{x} + x\dot{y})$

$\omega = \frac{qB_0}{cm}$

$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) + \frac{qB_0}{2c}(-y'\dot{x}' + x'\dot{y}')$

$= \frac{1}{2}m((\dot{x})^2 + (+\dot{y})^2) + \frac{qB_0}{2c}[x(+\dot{y}) - y(\dot{x})]$

$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB_0}{2c}[x\dot{y} - y\dot{x}] = \mathcal{L}$

d) $x' = x\cos\theta - y\sin\theta$

$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

$\dot{x}' = \dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta$

$\dot{y}' = \dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta$

$\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

ii) $\dot{x}'y' = x\sin\theta\,\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin^2\theta\, x + y\dot{x}\cos^2\theta - \dot{y}\sin\theta\, y\cos\theta$

i) $\dot{y}'x' = x\cos^2\theta(\dot{y}) - y(\dot{x})\sin^2\theta + x\cos\theta\sin\theta(\dot{x}) - y\sin\theta(\dot{y})\cos\theta$

i)-ii) $= x\dot{y} - y\dot{x}$

e) con teorema de Noether

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j - \epsilon G\right) = cte}$$

$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$

$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

$\theta = 0$

$x'(0) = x$, $x' = x + (-x\cancel{\sin\theta} - y\cancel{\cos\theta})\epsilon = x - y\epsilon$

$y'(0) = y$, $y' = y + (x\cancel{\cos\theta} - y\cancel{\sin\theta})\epsilon = y + x\epsilon$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{qB_0}{2c}(-y\dot{x} + x\dot{y})$

$(m\dot{x} - y\frac{qB_0}{2c})(-y\epsilon) + (m\dot{y} + x\frac{qB_0}{2c})(x\epsilon) = cte$

$$\underbrace{\underbrace{m(\dot{y}x - y\dot{x})}_{P_y x - yP_x}}_{L_z} + \frac{qB_0}{2c}\underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2} = cte = L_z + r^2\frac{qB_0}{2c}$$

radio en polares--> ya nos indica que el movimiento es circular

momento angular en z

Simetrías 2

(f) Escriba el Lagrangiano del problema usando el *gauge de Landau*: $\mathbf{A} = -B_0 y\hat{x}$.

(g) Verifique que la transformación de coordenadas infinitesimal:

$$x' = x - y\epsilon$$
$$y' = x\epsilon + y$$

es una transformación de simetría generalizada del Lagrangiano. Use el teorema de Nöther para determinar la magnitud conservada. Interprete separando la parte mecánica de la parte magnética. Compare con lo obtenido usando el otro *gauge*.

f) $\bar{A} = -B_0 y\hat{x}$

$U = -q\frac{\vec{V}\cdot\vec{A}}{c} = +\frac{q}{c}B_0(\dot{x}y)$

$x' = x - y\epsilon$, $\dot{x}' = \dot{x} - \dot{y}\epsilon$

$y' = x\epsilon + y$, $\dot{y}' = \dot{x}\epsilon + \dot{y}$

$x' = \overbrace{r\cos\theta}^{x} - \overbrace{\sin\theta\, r}^{y}\epsilon$

$y' = \underbrace{r\sin\theta}_{y} + \underbrace{r\cos\theta}_{x}\epsilon$

$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) - \frac{qB_0}{c}(\dot{x}'y') = \frac{1}{2}m\underbrace{((\dot{x} - \dot{y}\epsilon)^2 + (\dot{x}\epsilon + \dot{y})^2)}_{\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{y}\epsilon + \dot{y}^2\epsilon^2 + \dot{x}^2\epsilon^2 + 2\dot{x}\dot{y}\epsilon + \dot{y}^2\epsilon^2 + \dot{y}^2} - \frac{qB_0}{c}((\dot{x} - \dot{y}\epsilon)(x\epsilon + y))$

$\dot{x}\epsilon x + \dot{x}y - \dot{y}\epsilon^2 x - \dot{y}\epsilon y$

$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{qB_0}{c}\dot{x}y + \epsilon\left[-\frac{qB_0}{c}(\dot{x}x - \dot{y}y)\right] + O(\epsilon^2)$

$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon\frac{d}{dt}(G) \longrightarrow G = -\frac{qB_0}{2c}(x^2 - y^2)$

se tiene la transformación de simetría generalizada

e) con teorema de Noether

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j - \epsilon G\right) = cte}$$

$(m\dot{x} - y\frac{qB_0}{c})(-y\epsilon) + m\dot{y}(x\epsilon) + \epsilon\frac{qB_0}{2c}(x^2 - y^2) = cte$

$\underbrace{-P_x y + P_y x}_{L_z} + \frac{qB_0}{c}y^2 - \frac{qB_0}{2c}y^2 + \frac{qB_0}{2c}x^2 = cte$

$L_z + \frac{qB_0}{2c}r^2 = cte$

la misma constante de movimiento que en el anterior punto

En el primer ejercicio: $A_1 = B_0 x\hat{y}$

En el segundo: $A_2 = \frac{B_0}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y})$

En el tercero: $A_3 = -B_0 y\hat{x}$

Se obtienen las mismas ecuaciones de movimiento y además se conservan las mismas constantes, entonces los Gauge propuestos dejan invariante al sistema físico.
Esto nos sirvió para establecer las ecuaciones de movimiento por un lado, y para obtener las constantes del sistema por otro.