Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Mecánica clásica: Ejercicio 7

Nicolás Piovanelli
piovanellinicolas@hotmail.com

Índice

1. Introducción

Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un potencial central de la forma

$$V_r = k/r^2 \tag{1}$$

El sistema consta de una partícula por lo que en principio es un sistema con 3 grados de libertad. Sin embargo la partícula esta sometida únicamente a un potencial central por lo que el momento angular del sistema se conserva, a partir de lo cual puedo concluir que el movimiento se dará en un plano. Debido a esto me bastan 2 coordenadas generalizadas para describir el movimiento de la partícula. En este caso voy a utilizar coordenadas polares usuales.

Escribo la posición de la partícula

$$\vec{r}_t = r(\hat{r}_\phi) \tag{2}$$

Derivando esta ecuación obtengo la expresión de la velocidad

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}(\hat{r}) + r\dot{\phi}(\hat{\phi}) \tag{3}$$

Con esta información puedo obtener la expresión de la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \tag{4}$$

Con esta expresión y la ecuación (1) puedo escribir el lagrangiano del sistema

$$L_{(r,\phi,\dot{r},\dot{\phi})} = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{k}{r^2} \tag{5}$$

Del Lagrangiano se pueden extraer las siguientes constantes

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow H = cte \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow P_\phi = l_z = mr^2\dot{\phi} = cte \tag{7}$$

Identificando l_z como el momento angular en el eje z (Perpendicular ambos ejes de polares, conformando una terna derecha)

Además tengo que el potencial no depende de las velocidades y la energía cinética

$$T_{(\lambda\dot{r},\lambda\dot{\phi})} = \frac{1}{2}m(\lambda^2\dot{r}^2 + \lambda^2r^2\dot{\phi}^2) = \lambda^2\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) = \lambda^2T_{(\dot{r},\dot{\phi})} \tag{8}$$

es homogénea grado 2 en las velocidades. Por lo tanto

$$H = E = cte \tag{9}$$

Desarrollo la expresión de la Energía como

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + k/r^2 \tag{10}$$

Utilizando la expresión del momento angular puedo expresar la energía en términos de una sola coordenada

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2} \tag{11}$$

Obteniendo así un problema unidimensional equivalente. Donde podemos identificar los términos de la siguiente forma

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\text{Termino cinético}} + \underbrace{\frac{l_z^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2}}_{\text{Potencial efectivo}} \tag{12}$$

Para estudiar los posibles movimientos, sabiendo que $k = 0$ realizo un gráfico del potencial efectivo para el caso $k \geq 0$

$$V_{eff} = \frac{l_z^2}{2mr^2} \tag{13}$$

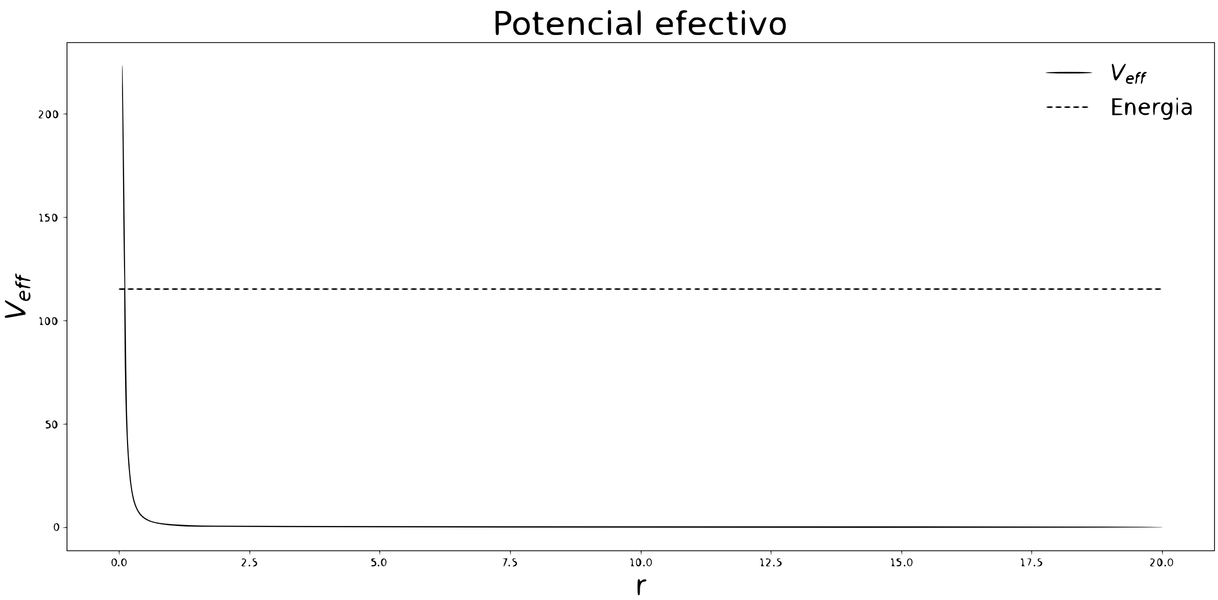

Figura 1: Gráfico del potencial efectivo para $k \geq 0$.

Se puede ver que para $E > 0$ el movimiento sera semi-ligado. Calculo el punto de retorno r_0 para dicho movimiento.

El punto de retorno se dará cuando $\dot{r} = 0$ por lo tanto, aplicando esta condición a la ecuación (12), considerando $k = 0$ y despejando obtengo que

$$r_0 = \sqrt{\frac{l^2}{2mE}} \tag{14}$$

Para $k > 0$ resultara

$$r_0 = \sqrt{\frac{l^2 + 2km}{2mE}} \tag{15}$$

En lo que resta del ejercicio se cambia por simplicidad la notacion $l_z = l$.

2. Inciso a.1: Ecuaciones de trayectoria: Primer método

Para el caso $k = 0$ tengo que

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} \tag{16}$$

Para calcular la trayectoria despejo $\dot{r}$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{l^2}{m^2r^2}} \tag{17}$$

Expresando la velocidad en términos de diferenciales convenientes tengo que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi}.\frac{l}{mr^2} \tag{18}$$

Utilizando esto en la ecuación (17) y operando se obtiene

$$d\phi = \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} \tag{19}$$

Integrando ambos lados

$$\int_0^\phi d\phi = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{1}{r^2}}}dr \tag{20}$$

La integral de la izquierda resulta trivial, para la integral de la derecha realizo el siguiente cambio de variables

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow du = -\frac{dr}{r^2} \tag{21}$$

$$\phi_{(u)} = -\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - u^2}} \tag{22}$$

Volviendo a la variable original

$$\phi_{(r)} = arccos(\frac{\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2}}}) - arccos(\frac{\frac{1}{r_0}}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2}}}) \tag{23}$$

Reemplazando el valor de r_0 obtenido en la ecuación (14) obtengo

$$r_{(\phi)} = \frac{1}{Acos(\phi} \tag{24}$$

con

$$A = \sqrt{\frac{2mE}{l^2}} \tag{25}$$

Búscalo la ecuación de trayectoria para $k > 0$
Redefino l de la siguiente forma

$$\tilde{l} = \alpha^2 l^2 \tag{26}$$

con

$$\alpha^2 = 1 + \frac{2km}{l^2} \tag{27}$$

Operando en la ecuación (17) tengo

$$d\phi = \frac{ldr}{m} r^2 \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{1^2}{m^2 r^2}} \tag{28}$$

Multiplico ambos lados de la ecuación para poner todo en términos del $\tilde{l}$

$$\alpha d\phi = \alpha \frac{ldr}{m} r^2 \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{1^2}{m^2 r^2}} \tag{29}$$

Operando puedo llegar a la siguiente expresión

$$d\tilde{\phi} = \frac{dt}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{\tilde{l}^2} - \frac{1}{r^2}}} \tag{30}$$

Integrando ambos lados y resolviendo de forma análoga al caso anterior se obtiene

$$\tilde{\phi} = arccos(\frac{\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2mE}{\tilde{l}^2}}}) - arccos(\frac{\frac{1}{r_0}}{\sqrt{\frac{2mE}{\tilde{l}^2}}}) \tag{31}$$

Reemplazando las expresiones de r_0 y α, ecuaciones (15) y (27) respectivamente se obtiene

$$r_{(\phi)} = \frac{1}{\tilde{A}cos(\phi} \tag{32}$$

Con

$$A = \sqrt{\frac{2mE}{\tilde{l}^2}} \tag{33}$$

De la ecuación (32) se puede ver que las asíntotas de esta trayectoria se encuentran en

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2\alpha} \wedge \phi_2 = -\frac{\pi}{2\alpha} \tag{34}$$

3. Inciso a.2: Ecuaciones de trayectoria: Segundo método

Resuelvo por otro método sugerido por el enunciado

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^2} = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{l^2 + 2mk}{2mr^2} \tag{35}$$

Despejando de esta ecuación

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - \frac{l^2 + 2mk}{2mr^2}]} \tag{36}$$

Reescribiendo $\dot{r}$ en términos diferenciales convenientes

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{dr}{d\phi}.\frac{l}{mr^2} \tag{37}$$

Reemplazando esto en la ecuación (36), operando e integrando ambos lados se obtiene

$$\int_0^{\phi} d\phi = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - (1 + \frac{2mk}{l^2})\frac{1}{r^2}}} \tag{38}$$

Realizando el cambio de variables

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow du = -\frac{dr}{r^2} \tag{39}$$

$$\int_0^{\phi} d\phi = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - (1 - \frac{2mk}{l^2})u^2}} \tag{40}$$

Resolviendo se obtiene

$$\phi_{(r)} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{2mk}{l^2})}}(arccos(\sqrt{\frac{(1 + \frac{2mk}{l^2})}{\frac{2mE}{l^2}}}) - arccos(\sqrt{\frac{(1 + \frac{2mk}{l^2})}{\frac{2mE}{l^2}}}\frac{1}{r_0})) \tag{41}$$

Reemplazo r_0

$$\phi_{(r)} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{2mk}{l^2})}}(arccos(\sqrt{\frac{(1 + \frac{2mk}{l^2})}{\frac{2mE}{l^2}}}) \tag{42}$$

Para comparar con lo obtenido en el inciso anterior empiezo por identificar α

$$\phi_{(r)} = \frac{1}{\alpha}(arccos(\sqrt{\frac{(1 + \frac{2mk}{l^2})}{\frac{2mE}{l^2}}}) \tag{43}$$

Luego identificando $\tilde{A}$ y despejando obtengo

Que no es mas que el resultado obtenido en el inciso anterior.

4. Inciso b: Trayectorias con $l^2 > -2mk > 0$

En este caso la ecuación (12) se modifica, quedando

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2 - 2mk}{2mr^2} \tag{45}$$

Busco la expresión para r_0

$$r_0 = \sqrt{\frac{l^2 - 2km}{2mE}} \tag{46}$$

Redefino l de la siguiente forma

$$\check{l} = \tilde{\alpha} l^2 \tag{47}$$

Utilizando esto en la ecuación (45) y resolviendo de forma análoga al inciso a)1) se obtiene la nueva trayectoria

$$\tilde{\alpha}\phi = arccos(\frac{\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2mE}{\tilde{\alpha^2} l^2}}}) - arccos(\frac{\frac{1}{r_0}}{\sqrt{\frac{2mE}{\tilde{\alpha^2} l^2}}}) \tag{48}$$

Reemplazando $\tilde{\alpha}$ y r_0 se obtiene

$$\tilde{\alpha}\phi = arccos(\frac{\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{2mE}{\tilde{\alpha^2} l^2}}}) \tag{49}$$

Identificando

$$\check{A} = \sqrt{\frac{2mE}{\tilde{\alpha}^2 l^2}} \tag{50}$$

Se obtiene

$$r_\phi = \frac{1}{\check{A} cos(\check{\phi})} \tag{51}$$

Obteniendo la misma ecuación de trayectoria con la salvedad de que

$$\tilde{\alpha} < \alpha \tag{52}$$

Lo que implica que las asíntotas poseerán un mayor ángulo.

5. Inciso c:

Ahora el potencial es atractivo, con $l^2 < -2mk < 0$ Por lo que la ecuación (12) de la energía resulta

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{k}{r^2} \tag{53}$$

Para el problema unidimensional equivalente sera

$$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2 - 2mk}{2mr^2}}_{V_{eff}} \tag{54}$$

Gráfico el potencial efectivo

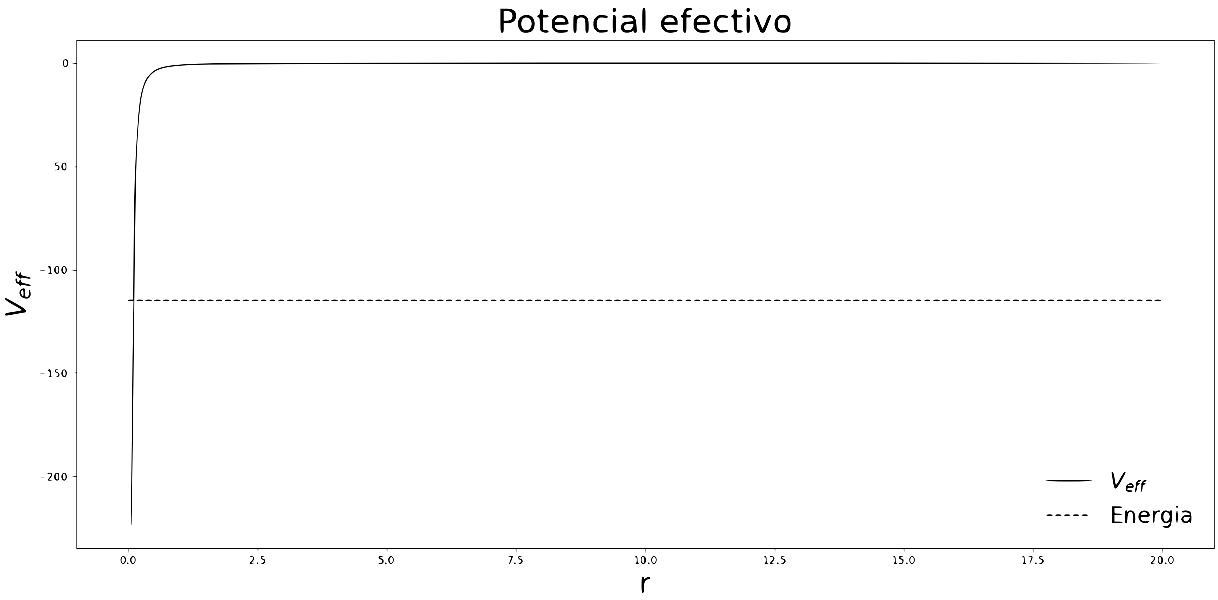

Figura 2: Gráfico del potencial efectivo para $k \geq 0$.

En este gráfico se puede observar que para el caso que se plantea en el enunciado $E < 0$ el movimiento es semi-ligado con un punto de retorno ($\dot{r} = 0$) en r_0.

Busco r_0

$$E = V_{eff} = \frac{l^2 - 2mk}{2mr_0^2} \tag{55}$$

Despejando

$$r_0 = \sqrt{\frac{2mE}{l^2 - 2mk}} \tag{56}$$

Busco la trayectoria, despejando de la ecuación (54)

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - \frac{l^2 - 2mk}{2mr^2}]} \tag{57}$$

Escribiendo la velocidad en términos diferenciales e integrando ambos lados se obtiene

$$\int_0^\phi = \int_{r_0}^2 r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2 - \frac{1}{r^2}(1 - \frac{2mk}{l^2})}}} \tag{58}$$

Realizando el cambio de variables

$$u = \frac{1}{r} \Rightarrow du = -\frac{dr}{r^2} \tag{59}$$

$$\int_0^\phi d\phi = -\int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} + (1 - \frac{2mk}{l^2})u^2}} \tag{60}$$

Resolviendo la integral se obtiene

$$\phi_{(u)} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{2mk}{l^2} - 1)}} Arccosh(\sqrt{\frac{(1 - \frac{2mk}{l^2})}{\frac{2mE}{l^2}}})\Big|_{u_0}^{u} \tag{61}$$

Volviendo a la variable original y despejando se obtiene

$$r_{(\phi)} = \sqrt{\frac{A}{B}}.cosh^{-1}(c - \frac{\phi}{\sqrt{-A}}) \tag{62}$$

Donde se identifican

$$A = (1 - \frac{2mk}{l^2}) \wedge B = \frac{2mE}{l^2} \tag{63}$$

6. Inciso d: Dispersión

A partir de la ecuaciones (27) y (34) y considerando que en el infinito el la energía tiene componente únicamente cinética, puedo escribir α como

$$\alpha = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{s^2 E}}} \tag{64}$$

El ángulo de dispersión estará dado por

$$\chi = \pi - 2\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{s^2 E}}} \tag{65}$$

y la sección eficaz diferencial por

$$\frac{d\delta}{d\Omega} = \frac{s}{sen(\chi)} \frac{ds}{d\chi} d\Omega \tag{66}$$

Despejando s de la ecuación (65) y reemplazando en la ecuación (66) obtengo que la sección eficaz diferencial estará dada por

$$\frac{d\delta}{d\Omega} = \frac{\pi^2(\pi - \chi)k}{E(\pi^2 - (\pi - \chi)^2)^2} \frac{1}{sen(\chi)} \tag{67}$$