# Hola

# Transformaciones canónicas

# Transformaciones canónicas

Queremos una transformación $F$ que nos lleve de unas coordenadas generalizadas $q, p$ a otras $Q, P$:

$$\left\{\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right. \quad \underset{F}{\longrightarrow} \quad \left\{\dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_k} \right.$$

# Transformaciones canónicas

Queremos una transformación $F$ que nos lleve de unas coordenadas generalizadas $q, p$ a otras $Q, P$:

$$\left\{\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \quad \xrightarrow[F]{} \quad \left\{\dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_k}\right.\right.$$

Para encontrar esta transformación, partimos de la acción

$$S[q(t), p(t)] = \int \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t$$

# Transformaciones canónicas

Queremos una transformación $F$ que nos lleve de unas coordenadas generalizadas $q, p$ a otras $Q, P$:

$$\left\{\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right. \quad \xrightarrow[F]{} \quad \left\{\dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_k} \right.$$

Para encontrar esta transformación, partimos de la acción

$$S[q(t), p(t)] = \int \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{H} \; \mathrm{d}t \;\equiv\; S[Q(t), P(t)] = \int \sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{K} \; \mathrm{d}t$$

# Transformaciones canónicas

Queremos una transformación $F$ que nos lleve de unas coordenadas generalizadas $q, p$ a otras $Q, P$:

$$\left\{\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \quad \xrightarrow[F]{} \quad \left\{\dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_k}\right.\right.$$

Para encontrar esta transformación, partimos de la acción

$$S[q(t), p(t)] = \int \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{H} \, \mathrm{d}t \; \equiv \; S[Q(t), P(t)] = \int \sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{K} \, \mathrm{d}t$$

El integrando está definido a menos de una derivada total del tiempo, por lo que vale

$$\sum_k p_k \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} - \mathcal{H}(q, p) = \sum_k P_k \frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}t} - \mathcal{K}(Q, P) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

# Transformaciones canónicas

Queremos una transformación $F$ que nos lleve de unas coordenadas generalizadas $q, p$ a otras $Q, P$:

$$\left\{\dot{q}_k = \tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right. \quad \underset{F}{\longrightarrow} \quad \left\{\dot{Q}_k = \tfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\tfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_k} \right.$$

Para encontrar esta transformación, partimos de la acción

$$S[q(t), p(t)] = \int \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{H} \ \mathrm{d}t \ \equiv \ S[Q(t), P(t)] = \int \sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{K} \ \mathrm{d}t$$

El integrando está definido a menos de una derivada total del tiempo, por lo que vale

$$\sum_k p_k \frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t} - \mathcal{H}(q, p) = \sum_k P_k \frac{\mathrm{d}Q_k}{\mathrm{d}t} - \mathcal{K}(Q, P) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

y multiplicando por $\mathrm{d}t$:

$$\sum_k p_k \ \mathrm{d}q_k - \mathcal{H}(q, p) \ \mathrm{d}t = \sum_k P_k \ \mathrm{d}Q_k - \mathcal{K}(Q, P) \ \mathrm{d}t + \mathrm{d}F$$

# Transformaciones canónicas

Despejando el diferencial de $F$ obtenemos

$$\mathrm{d}F = \sum_k p_k \, \mathrm{d}q_k - \sum_k P_k \, \mathrm{d}Q_k - (\mathcal{H} - \mathcal{K}) \, \mathrm{d}t$$

# Transformaciones canónicas

Despejando el diferencial de $F$ obtenemos

$$\mathrm{d}F = \sum_k p_k \, \mathrm{d}q_k - \sum_k P_k \, \mathrm{d}Q_k - (\mathcal{H} - \mathcal{K}) \, \mathrm{d}t$$

y como $\mathrm{d}F$ es una diferencial exacto, entonces debe ser

$$\boxed{F(q, Q, t) \quad \text{tal que} \quad p_k = \frac{\partial F}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{K}}$$

# Transformaciones canónicas

Despejando el diferencial de $F$ obtenemos

$$\mathrm{d}F = \sum_k p_k \, \mathrm{d}q_k - \sum_k P_k \, \mathrm{d}Q_k - (\mathcal{H} - \mathcal{K}) \, \mathrm{d}t$$

y como $\mathrm{d}F$ es una diferencial exacto, entonces debe ser

$$\boxed{F_1(q, Q, t) \quad \text{tal que} \quad p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{K}}$$

**Generatriz de tipo 1**

# Transformaciones canónicas

Despejando el diferencial de $F$ obtenemos

$$\mathrm{d}F = \sum_k p_k \,\mathrm{d}q_k - \sum_k P_k \,\mathrm{d}Q_k - (\mathcal{H} - \mathcal{K})\,\mathrm{d}t \qquad [\,*\,]$$

y como $\mathrm{d}F$ es una diferencial exacto, entonces debe ser

$$\boxed{F_1(q, Q, t) \quad \text{tal que} \quad p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{K}} \qquad \textbf{Generatriz de tipo 1}$$

Si tomamos $P\mathrm{d}Q = \mathrm{d}(QP) - Q\mathrm{d}P$ en $[\,*\,]$, obtenemos

# Transformaciones canónicas

Despejando el diferencial de $F$ obtenemos

$$\mathrm{d}F = \sum_k p_k\ \mathrm{d}q_k - \sum_k P_k\ \mathrm{d}Q_k - (\mathcal{H} - \mathcal{K})\ \mathrm{d}t \quad [\,*\,]$$

y como $\mathrm{d}F$ es una diferencial exacto, entonces debe ser

$$\boxed{F_1(q, Q, t) \quad \text{tal que} \quad p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{K}}$$

**Generatriz de tipo 1**

Si tomamos $P\mathrm{d}Q = \mathrm{d}(QP) - Q\mathrm{d}P$ en $[\,*\,]$, obtenemos

$$\mathrm{d}F = \sum_k p_k\ \mathrm{d}q_k - \sum_k Q_k\ \mathrm{d}P_k - (\mathcal{H} - \mathcal{K})\ \mathrm{d}t$$

# Transformaciones canónicas

Despejando el diferencial de $F$ obtenemos

$$\mathrm{d}F = \sum_k p_k \, \mathrm{d}q_k - \sum_k P_k \, \mathrm{d}Q_k - (\mathcal{H} - \mathcal{K}) \, \mathrm{d}t \quad [\,*\,]$$

y como $\mathrm{d}F$ es una diferencial exacto, entonces debe ser

$$\boxed{F_1(q, Q, t) \quad \text{tal que} \quad p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{K}}$$

**Generatriz de tipo 1**

Si tomamos $P\mathrm{d}Q = \mathrm{d}(QP) - Q\mathrm{d}P$ en $[\,*\,]$, obtenemos

$$\mathrm{d}F = \sum_k p_k \, \mathrm{d}q_k - \sum_k Q_k \, \mathrm{d}P_k - (\mathcal{H} - \mathcal{K}) \, \mathrm{d}t$$

lo que implica

$$\boxed{F_2(q, P, t) \quad \text{tal que} \quad p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}, \quad Q_k = -\frac{\partial F_2}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{K}}$$

**Generatriz de tipo 2**

# Funciones generatrices

**Generatriz de tipo 1** $F_1(q, Q, t):$ $\quad p_k = \dfrac{\partial F_1}{\partial q_k}, \quad P_k = -\dfrac{\partial F_1}{\partial Q_k}, \quad \dfrac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{K}$

**Generatriz de tipo 2** $F_2(q, P, t):$ $\quad p_k = \dfrac{\partial F_2}{\partial q_k}, \quad Q_k = -\dfrac{\partial F_2}{\partial P_k}, \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{K}$

**Generatriz de tipo 3** $F_3(p, Q, t):$ $\quad q_k = -\dfrac{\partial F_3}{\partial p_k}, \quad P_k = -\dfrac{\partial F_3}{\partial Q_k}, \quad \dfrac{\partial F_3}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{K}$

**Generatriz de tipo 4** $F_4(p, P, t):$ $\quad q_k = -\dfrac{\partial F_4}{\partial p_k}, \quad Q_k = -\dfrac{\partial F_4}{\partial P_k}, \quad \dfrac{\partial F_4}{\partial t} = \mathcal{H} - \mathcal{K}$

# Relaciones directas (P8a)

$$F_1(q, Q, t) \quad \longrightarrow \quad \left.\frac{\partial p_i}{\partial Q_j}\right|_{q,Q} = -\left.\frac{\partial P_j}{\partial q_i}\right|_{q,Q}$$

$$F_2(q, P, t) \quad \longrightarrow \quad \left.\frac{\partial p_i}{\partial P_j}\right|_{q,P} = \left.\frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\right|_{q,P}$$

$$F_3(p, Q, t) \quad \longrightarrow \quad \left.\frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\right|_{p,Q} = \left.\frac{\partial P_j}{\partial p_i}\right|_{p,Q}$$

$$F_4(p, P, t) \quad \longrightarrow \quad \left.\frac{\partial q_i}{\partial P_j}\right|_{p,P} = -\left.\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\right|_{p,P}$$

# Mostrar que una transformación es canónica (P8b)

# Mostrar que una transformación es canónica (P8b)

Queremos mostrar que la transformación

$$Q = \log\left(\frac{\sin p}{q}\right), \quad P = q \cot p$$

es canónica.

# Mostrar que una transformación es canónica (P8b)

Queremos mostrar que la transformación

$$Q = \log\left(\frac{\sin p}{q}\right), \quad P = q \cot p$$

es canónica.

Algunas de nuestras opciones son:

- Mostrar que exsiste alguna $F_i$ que lleve $p, q \to P, Q$
- Mostrar que la matriz de transformación $M_{ij}$ cumple la condición simpléctica
- Comprobar que los corchetes de Poisson dan lo que tienen que dar
- Comprobar que se cumplen las relaciones directas

# Mostrar que una transformación es canónica (P8b)

Queremos mostrar que la transformación

$$Q = \log\left(\frac{\sin p}{q}\right), \quad P = q \cot p$$

es canónica.

Algunas de nuestras opciones son:

- Mostrar que exsiste alguna $F_i$ que lleve $p, q \to P, Q$
- Mostrar que la matriz de transformación $M_{ij}$ cumple la condición simpléctica
- Comprobar que los corchetes de Poisson dan lo que tienen que dar
- Comprobar que se cumplen las relaciones directas $\longleftarrow$

Eso es todo