Entrega 3 : Complemento de solución.

Solo plantearemos la forma de solución tipo problema 3 de la Guía 3

(a.1) $$V(r) = \frac{k}{r^2} \quad ,$$

$k=0$:

La trayectoria para $k=0$ es una recta MRU pues no hay fuerzas

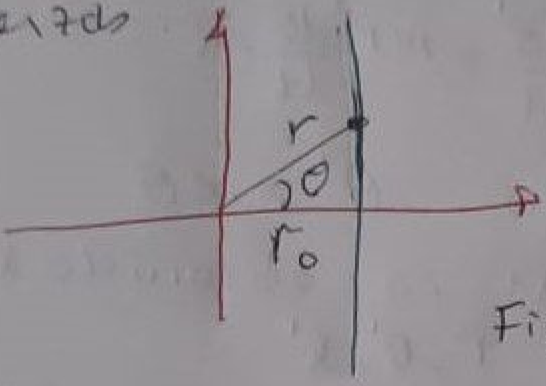

Fig 1.

La trayectoria en polares es :

$$r\cos\theta = r_0 \quad ó \quad r = \frac{r_0}{\cos\theta}$$

El momento angular es

$$\ell = m v_0 r_0 \Rightarrow r_0 = \sqrt{\frac{\ell^2}{2mE}}$$

K>0: vemos el potencial efectivo:

$$V_{ef} = \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{K}{r^2}$$

$$= \frac{l^2}{2mr^2}\left(1 + \frac{2Km}{l^2}\right)$$

$$= \frac{l'^2}{2mr^2}$$

redefiniendo el momento angular "eliminamos" el potencial y la solución es la obtenida antes.

$$\text{con} \quad l' = \alpha l \quad , \boxed{\alpha = \sqrt{1 + \frac{2mK}{l^2}}}$$

$$mr^2 \frac{d\theta'}{dt} = mr^2 \frac{d\theta}{dt} \cdot \alpha$$

¿o redefinimos $\theta' = \alpha \theta$

y podemos usar lo obtenido en las variables r, θ', l'

$$r(\theta') = \frac{r_0'}{\cos\theta'} \quad , r_0' = \sqrt{\frac{l'^2}{2mE}}$$

y en variables originales r, θ, l

$$\boxed{r(\theta) = \sqrt{\frac{l^2 + 2mK}{2mE}} \frac{1}{\cos(\alpha\theta)}}$$

la trayectoria posee asíntotas:

$r \to \infty \quad \cos(\alpha\theta) \to 0$

$\therefore \quad \alpha\theta \to \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta < \begin{matrix} \frac{\pi}{2\alpha} \\ -\frac{\pi}{2\alpha} \end{matrix}$

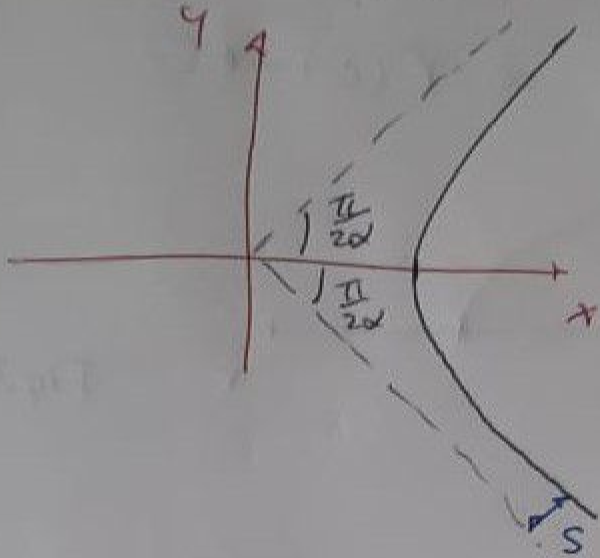

Fig 2

(b) Si $\ell^2 + 2mk > 0$ no cambia el tipo de solución, aún cuando k es negativo

(c) Si $\ell^2 + 2mk < 0$, α es imaginario:

$$\alpha = i\sqrt{\frac{|\ell^2 + 2mk|}{\ell^2}} = i|\alpha|$$

usamos: $\cos(\alpha\theta) = \cos(i|\alpha|\theta) = \cosh(|\alpha|\theta)$ coseno hiperbólico como $E<0$ $\sqrt{\dfrac{\ell^2+2mk}{2mE}}$ es real >0

$$r(\theta)=\sqrt{\frac{\ell^2+2mk}{2mE}}\,\frac{1}{\cosh(|\alpha|\theta)}$$

Si θ crece $\Rightarrow r(\theta)\to 0$

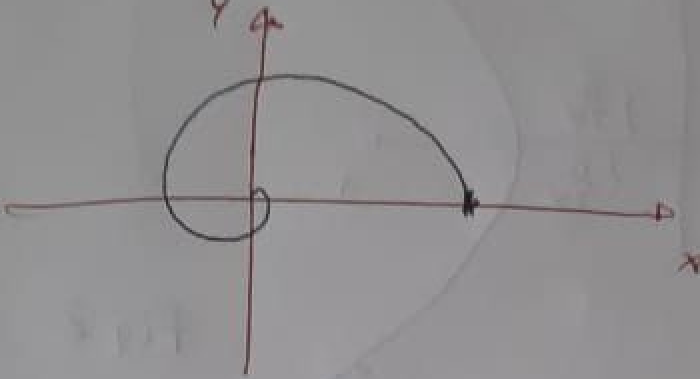

Fig 3.

(d) De la figura 2 el ángulo de dispersión:

$$\chi=\pi-2\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)$$

usando $\ell=mV_0 s$

$$\chi=\pi-\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{k}{s^2E}}}$$

se obtiene $$s^2=\frac{k}{E}\frac{1}{\left[\left(\frac{\pi}{\pi-\chi}\right)^2-1\right]}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{1}{2}\frac{ds^2}{d\chi}\frac{1}{\sin\chi}$$