

Mecánica clásica-2do cuatrimestre de 2023

Guía 8: Cinemática y dinámica relativista.

Cinemática relativista.

1. Utilizando un diagrama espacio-temporal de Minkowski muestre los efectos de la contracción de Lorentz y de la dilatación temporal.
2. En un sistema de referencia inercial S se propaga una onda electromagnética plana en una cierta dirección \mathbf{n} , de manera que la amplitud de la misma puede expresarse como

$$A = A_0 \cos[k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct)].$$

Muestre que si se observa dicha onda desde un sistema S' , que se mueve con velocidad \mathbf{V} respecto de S , la dirección de propagación será distinta, de valor

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} + (\gamma - 1)(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})\mathbf{V}/V^2 - \gamma\mathbf{V}/c}{\gamma(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}/c)},$$

efecto conocido como aberración.

Asimismo, muestre que la frecuencia $\omega = kc$, pasa a ser en el sistema S'

$$\omega' = \gamma(1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}/c)\omega,$$

que es el efecto Doppler relativista (difiere del galileano en el factor γ).

3. Considere la famosa paradoja de los mellizos. Usando un diagrama espacio-temporal de Minkowski indique las líneas de universo de ambos mellizos y de las señales de radio que se envían uno al otro a intervalos regulares iguales en el sistema propio de cada uno de ellos. Note la diferencia de escalas en el diagrama de los intervalos para cada mellizo y discuta la diferencia entre intervalos de recepción de cada señal e intervalos de emisión. Repita el análisis desde el punto de vista galileano, pero considerando que las señales de radio tienen siempre velocidad c independientemente de la velocidad de la fuente emisora. Discuta la diferencia del efecto Doppler en los casos relativista y galileano como se manifiesta en los diagramas previos.

Dinámica relativista.

4. Obtenga las ecuaciones de movimiento de una partícula relativista de carga q y masa m en un campo electromagnético externo.
5. Resuelva las ecuaciones de movimiento de una partícula de carga q y masa m en un campo magnético $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{z}$. Muestre que la velocidad de la misma rota alrededor de \mathbf{B} con una velocidad angular $\omega_0 = -(qc^2/E)\mathbf{B}$ denominada frecuencia de Larmor, donde E es la energía. Muestre que en el límite no relativista $v/c \ll 1$ se obtiene $\omega_0 \sim |q|B_0/m$ denominada también frecuencia de ciclotrón.

6. Para el caso en que la velocidad es perpendicular al campo magnético \mathbf{B} , muestre que la partícula de carga q y masa m se mueve en una circunferencia de radio $R = \frac{v}{\omega_0} = \frac{\beta E}{q|B_0|}$. Calcule el valor del campo magnético necesario para mantener rotando en el acelerador LHC protones con $E = 7 \text{ TeV}$ en un radio de 4,3 Km.

7. Considere un cohete libre de fuerzas que se impulsa emitiendo gases a velocidad V_G constante, relativa al cohete. Usando la conservación del impulso total, pruebe que la ecuación que relaciona la velocidad u del cohete con su masa es

$$m \frac{du}{dm} = -V_G \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right).$$

Intégrela y determine la velocidad final en función de la fracción de masa final del cohete (respecto de la inicial) y de la velocidad de los gases de escape V_G . Note la conveniencia de obtener el máximo V_G posible.

8. Para una partícula de masa m que en reposo se desintegra en dos partículas de masas m_1 y m_2 , pruebe que la energía cinética $T_{1,2}$ (energía total menos energía en reposo) de cada una de ellas se expresa en la forma

$$T_{1,2} = \Delta m c^2 \left(1 - \frac{m_{1,2}}{m} - \frac{\Delta m}{2m} \right),$$

donde $\Delta m = m - m_1 - m_2$ es el exceso de masa del proceso.

Considere ahora que un sistema o partícula de masa m se desintegra o transforma en reposo en un conjunto de partículas, la suma de cuyas masas es igual a $m - \Delta m$. Usando lo deducido para el caso de sólo dos partículas resultantes justifique que en el caso general la energía cinética máxima posible de una partícula resultante genérica de masa m_i es

$$T_i^{\max} = \Delta m c^2 \left(1 - \frac{m_i}{m} - \frac{\Delta m}{2m} \right).$$

9. Una partícula de masa m que viaja a velocidad \mathbf{V} se desintegra en dos partículas de masas m_1 y m_2 . Determine la energía de cada una de ellas, y el ángulo correspondiente de la otra partícula, en función del ángulo que forma la trayectoria de una de ellas con la dirección de \mathbf{V} .

Demuéstrese que conociendo las masas m_1 y m_2 de las partículas resultantes y el ángulo entre sus trayectorias puede determinarse la masa m de la partícula inicial.

10. Para un choque elástico de dos partículas de igual masa m , una de las cuales se encuentra en reposo mientras que la otra se mueve a velocidad \mathbf{V} , determine las energías de las partículas resultantes, y el ángulo correspondiente de la otra partícula, en función del ángulo que forma una de ellas con la dirección de \mathbf{V} .