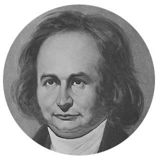

Mecánica Clásica - 1er cuatrimestre de 2024

Guía 7: *Ecuación de Hamilton-Jacobi y variables de ángulo acción.*

1. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión bajo la influencia de un potencial $V(x)$.

   (a) Escribí la ecuación de H-J dependiente del tiempo y encontrá, por separación de variables, la función S en términos de una expresión integral para la función W, donde $S(x,t) = W(x) - Et$.

   (b) A partir de la función S, considerada como una función generatriz de tipo F_2 que conduce al hamiltoniano $K = 0$, encontrá una ecuación implícita para $x(t)$. Mostrá que el mismo resultado se obtiene por los métodos elementales de Física 1.

   (c) A partir de la función W, considerada como una función generatriz de tipo F_2 que conduce al hamiltoniano $K = E$, encontrá una ecuación implícita para $x(t)$ y observá que es equivalente a la del ítem anterior.

2. Una partícula está sujeta a una fuerza que aumenta linealmente con el tiempo, de modo que su hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} - mAtx.$$

   Resolvé la ecuación de H-J y a partir de la solución encontrá el movimiento $(x(t), p(t))$ de la partícula. ¿Qué representa físicamente la constante arbitraria que aparece en S?

   Pista: La ecuación no es separable, pero se puede proponer una solución de la forma $S(x,t) = f(t)x + g(t)$.

3. Una partícula de masa m se mueve en el plano $\theta = \pi/2$ bajo la influencia de un potencial central $V(r)$. Separando la ecuación de H-J en coordenadas polares, encontrá las ecuaciones implícitas que determinan $r(t)$ y $r(\varphi)$. Mostrá que los mismos resultados se obtienen por los métodos elementales de Física 1.

4. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de un potencial central $V(r)$. **Sin asumir que el movimiento es plano**, separá la ecuación de H-J en coordenadas esféricas. Usando las relaciones $p_i = \partial S/\partial q_i$, encontrá potenciales efectivos para el movimiento en r y en θ, e interpretá físicamente las constantes de separación.

5. Considerá un sistema físico cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial resulta $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde q_1, q_2, $\dot{q}_1$ y $\dot{q}_2$ son coordenadas y velocidades generalizadas. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistema? Resolvé esta ecuación para encontrar la función principal de Hamilton S. Deducí de allí el comportamiento dinámico del sistema.

6. Mostrá que en los siguientes casos la ecuación de H-J es separable:

   (a) En coordenadas cilíndricas, una partícula sujeta a un resorte fijado al origen.

   (b) Usando los ángulos de Euler, un giróscopo.

(c) En coordenadas esféricas, una partícula en un potencial de la forma

$$V(r, \theta, \varphi) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

En todos los casos, encontrá potenciales efectivos para los momentos.

7. Para una sujeta a un resorte que se mueve en una dimensión (oscilador armónico):

   (a) Hallá el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton. Repasá los diagramas de fase.

   (b) Usando la función generatriz $F_1(q, Q)$ encontrada en el ejercicio 10 de la guía anterior, que resultaba en el hamiltoniano $K(Q, P) = \omega P$, mostrá que (Q, P) son variables ángulo acción. Hallá el área encerrada por las curvas de E (energía) constante en el espacio de fases, y compará con el área encerrada por las del ítem (a).

8. Un oscilador armónico bidimensional (no isótropo) tiene un hamiltoniano dado por

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2).$$

   (a) Mostrá que la ecuación de H-J es separable y escribí su solución en términos de integrales.

   (b) Usando la parte independiente del tiempo de la solución, encontrá la ecuación que relaciona q_1 con q_2 y la que relaciona q_1, q_2 y t. A partir de estas dos ecuaciones, encontrá $q_1(t)$ y $q_2(t)$.

   (c) Calculá las variables acción $J_1(q, p)$ y $J_2(q, p)$ y escribí el hamiltoniano en función de ellas. Calculá las frecuencias de las variables ángulo.

   (d) Calculá las variables ángulo $w_1(q, p)$ y $w_2(q, p)$.

9. Considerá el hamiltoniano $H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2$. Resolvé el problema utilizando la técnica de Hamilton–Jacobi. Encontrá la órbita general de la solución de la ecuación de H–J. ¿Qué sistema físico podría corresponder a este problema? Resolvé este problema de otras tres maneras:

   (a) Escribiendo y resolviendo las ecuaciones canónicas.

   (b) Haciendo una transformación canónica con $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, eligiendo Q_2 y P_2 convenientemente (A y B son constantes), resolviendo para Q_i y P_i y luego antitransformando.

   (c) Por medio de variables de ángulo–acción.

10. Considerá un péndulo físico, es decir, un pingüino real (no puntual) que puede moverse en un plano vertical con algún punto fijo sobre su eje de simetría. El momento de inercia del pingüino respecto al punto fijo es I. Hay gravedad.

   (a) Mostrá que el hamiltoniano resulta $H = \frac{1}{2}I(p_\psi^2 - 2\alpha^2 \cos\psi)$, donde ψ es el ángulo que forma el eje del pingüino con la vertical, p_ψ su momento conjugado y α una constante a determinar.

   (b) Armá los diagramas de fase. Hallá puntos de equilibrio y discutí su estabilidad. Obtené la curva separatriz y dibujala. Determiná los movimientos de libración y rotación posibles y sus períodos.

(c) Mostrá que el área encerrada por la separatriz es 16α. Concluí que el máximo valor de la variable de acción para el movimiento de libración es $8\alpha/\pi$.

11. Un pingüino de masa m se mueve en el potencial $V(x) = \frac{m\lambda^2}{2}\left(|x| - a\right)^2$. Obtené las ecuaciones de Hamilton y dibujá los diagramas de fase, prestando especial atención a los cercanos al origen. Mostrá que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, y en cada una se definen distintas variables de ángulo–acción. Hallá la variable de acción en función de E en cada caso.

12. Considerá una partícula con hamiltoniano $H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$ para cada uno de los siguientes casos: $V(q) = -k^2/q + l^2/2mq^2$ y $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 + l^2/2mq^2$.

    (a) Dibujá los diagramas de fase, escribí las ecuaciones de las curvas separatrices e indicá las regiones que corresponden a movimientos de libración y rotación.

    (b) Para los movimientos de libración, escribí la variable de acción en función de la energía y hallá la relación $\psi = \psi(q, J)$, donde ψ es la variable de ángulo. ¿Cuál es la frecuencia del movimiento?

    (c) Encontrá la energía de las trayectorias con $J = n\hbar$ y $l = p\hbar$ (n, p números naturales; $\hbar$ constante). Discutí este punto con la almohada, con tus compañerxs y con tus docentes (en ese orden).

13. Una partícula se mueve en el espacio bajo la acción de un potencial central $V(|\mathbf{r}|)$.

    (a) Usando los resultados del ejercicio 3 (o no), calculá las variables de acción para la parte angular del movimiento. ¿Cómo se expresa el módulo del momento angular como función de las mismas? ¿Bajo qué condiciones el movimiento será periódico?

    (b) (Difícil!) Mostrá explícitamente que para el problema de Kepler y para el oscilador armónico el movimiento *es* periódico pero que para un potencial de la forma $V = a/r^2$ no lo es. Hallá la frecuencia de movimiento como función de la energía.

    (c) ¿Cuál es la energía de las órbitas definidas por las relaciones $J_i = n_i\hbar$? ¿Cuánto vale el momento angular de las mismas? (n_i entero y $\hbar$ constante).