Simetrías

- **Teorema de Noether:** Por cada transformación de simetría hay una cantidad conservada.

Transformación de simetría

Nuestro problema está descripto por $\{\bar{q}, t\}$.

TRANSFORMAMOS INFINITESIMALMENTE

$$\begin{cases} \bar{q} \longmapsto \bar{q}' = \bar{q} + \epsilon\, \bar{\eta}(\bar{q}, t) \\ t \longmapsto t' = t + \epsilon\, \Theta(\bar{q}, t) \end{cases}$$

OJO: $\bar{q}'$ depende de t' (no de t)

Si hacer este cambio nos deja el mismo problema físico, la transformación es de simetría.

$$S' = \int dt' \, \mathcal{L}(\bar{q}', \dot{\bar{q}}', t') = \int dt \, \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = S$$

Para que pase esto:

$$\mathcal{L}(\bar{q}', \dot{\bar{q}}', t') \cdot \frac{dt'}{dt} = \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) + \epsilon \dot{F}(\bar{q}, t)$$

y según Emmy, se conserva:

$$C(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \bar{\eta} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} - \Theta h - F$$

Esto podría terminar acá, es usar una formulita. Pero para entender un poco más qué esta pasando vamos de abajo para arriba (en complejidad).

Supongamos transformaciones que no cambian t:

$$\begin{cases} \bar{q} \longmapsto \bar{q}' = \bar{q} + \epsilon \bar{\eta} \\ t \longmapsto t' = t \end{cases}$$

Y pidamos algo más fuerte que $S' = S$,

pidamos:

$$\mathcal{L}(\bar{q}', \dot{\bar{q}}', t') = \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

$$\mathcal{L}(\bar{q} + \epsilon\bar{\eta}, \dot{\bar{q}} + \epsilon\dot{\bar{\eta}}, t) = \mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Desarrollamos el término de la izq. a $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \cdot \bar{\eta} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) \cdot \dot{\bar{\eta}}$$

$$=$$

$$\mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}} \cdot \bar{\eta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}} \cdot \dot{\bar{\eta}} = 0$$

Evaluemos en las $\bar{q}$ que solucionan E-L:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\right)\cdot \bar{\eta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\cdot \dot{\bar{\eta}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\cdot \bar{\eta}}_{:= C(\bar{q},\dot{\bar{q}},t)} \Big] = 0$$

$:= C(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) \rightarrow$ ¡SE CONSERVA!

La propuesta es no usar la fórmula que nos provee el teorema, si no que en cada problema sigamos la siguiente receta:

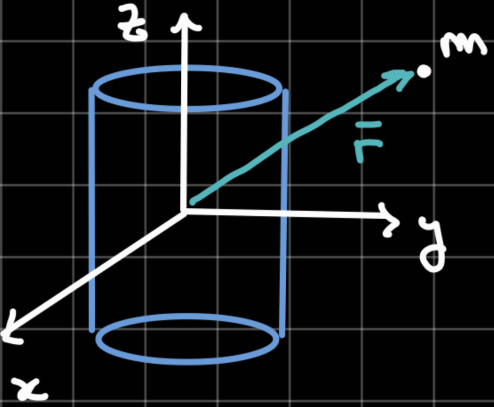
1) Encontrar una transformación que deje invariante $\mathcal{L}$ (ó S).

2) Expandir a primer orden en ϵ

3) Evaluar en las soluciones a E-L.

PROBLEMA 7: Partículas sometidas a campos gravitatorios/electrostáticos generados por distintas configuraciones.

(b) un cilindro infinito



$$\vec{r} = \rho\,\hat{\rho}(\varphi) + z\,\hat{z}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\,\hat{\rho} + \rho\dot{\varphi}\,\hat{\varphi} + \dot{z}\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}(\rho,\varphi,z) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(\rho,\varphi,z)$$

Por la simetría de la configuración:

$$U(\rho,\varphi,z) = U(\rho,\varphi+\epsilon,z) \quad \forall\epsilon.$$

(1) Esto nos lleva a proponer la transformación

$$\begin{cases} \rho \mapsto \rho' = \rho \\ \varphi \mapsto \varphi' = \varphi + \epsilon \\ z \mapsto z' = z \\ t \mapsto t' = t \end{cases}$$

→ tenemos que ver que deja $\mathcal{L}$ invariante

Como $t = t'$, $\dot{q} = \dot{q}'$.

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(\rho, \varphi, z)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}'^2 + \rho'^2\dot{\varphi}'^2 + \dot{z}'^2\right) - U(\rho', \varphi', z') =$$

$$= \mathcal{L}(\rho', \varphi', z', \dot{\rho}', \dot{\varphi}', \dot{z}', t') \checkmark$$

es simetría :)

Ahora expandimos a orden 1 en ϵ:

$$\mathcal{L}(\rho', \varphi', z', \dot{\rho}', \dot{\varphi}', \dot{z}', t') = \mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t)$$

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi + \epsilon, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) = \mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t)$$

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) + \epsilon\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$$

Ahora evalúo en E-L:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0$$

$$l_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} \rightarrow \text{se conserva}$$

(2) Sabemos que hay otra simetría en el potencial:

$$U(r, \varphi, z) = U(r, \varphi, z+\epsilon) \quad \forall \epsilon.$$

Proponemos la transformación:

$$\begin{cases} \rho \mapsto \rho' = \rho \\ \varphi \mapsto \varphi' = \varphi \\ z \mapsto z' = z + \epsilon \\ t \mapsto t' = t \end{cases}$$

Ejercicio: Ver que es simetría y que se conserva

$$p_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

(3) Hay una más:

$$\begin{cases} \rho \mapsto \rho' = \rho \\ \varphi \mapsto \varphi' = \varphi \\ z \mapsto z' = z \\ t \mapsto t' = t + \epsilon \end{cases}$$

Acá hay que ver cómo transforman las velocidades:

en este caso $q' = q$

$$\dot{q}' = \underbrace{\frac{dq'}{dt'}}_{\text{esto es mucho muy importante}} = \frac{dq}{dt'} = \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{=\dot{q}} \underbrace{\frac{dt}{dt'}}_{=1} = \dot{q}$$

→ Como $\mathcal{U}$ no depende de t es directo que el Lagrangiano es invariante

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t+\epsilon) = \mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t)$$

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\epsilon = \mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

→ acá no tenemos una derivada total ¿qué hacemos?

Recordemos que evaluando en las sol. de E-L:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{dh}{dt}$$

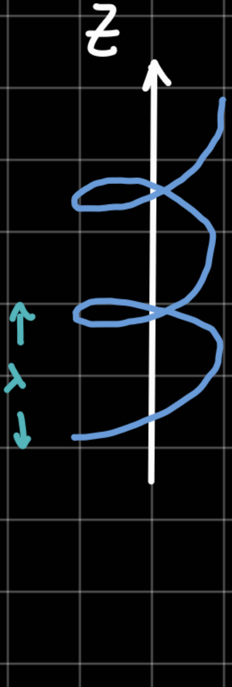
$\Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = E$ se conserva

según el ej. 6 de la guía 1, en este caso son iguales.

Hasta acá nada nuevo, ya vimos que si una coordenada es cíclica se conserva $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ y que si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ se conserva h.

Lo poderoso es que podemos tomar transformaciones más extrañas, como por ejemplo

(c) una hélice.



Acá rotar y trasladarse no las podemos hacer independientemente

Para ver la misma configuración si roté un ϵ:

$$\varphi' = \varphi + \epsilon$$

Tengo que trasladarme:

$$z' = z + \lambda \epsilon$$

El potencial entonces cumple que:

$$U(\rho, \varphi, z) = U(\rho, \varphi + \epsilon, z + \lambda \epsilon) \quad \forall \epsilon.$$

↳ De hecho de acá pueden mostrar que

$$U = U(\rho, z - \lambda \varphi)$$

Si proponemos
$$\begin{cases} \rho \mapsto \rho' = \rho \\ \varphi \mapsto \varphi' = \varphi + \epsilon \\ z \mapsto z' = z + \lambda \epsilon \\ t \mapsto t' = t \end{cases}$$

es directo que $\mathcal{L}$ es invariante.

$$\mathcal{L}(\rho, \varphi + \epsilon, z + \lambda \epsilon, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t) = \mathcal{L}(\rho, \varphi, z, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}, t)$$

$$\mathcal{L} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \epsilon \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$$

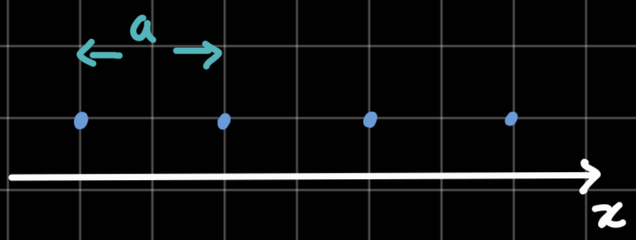
Ahora evalúo en E-L:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} + \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = 0$$

Entonces se conserva

$$\boxed{C := l_z + \lambda p_z}$$

(e) red unidimensional



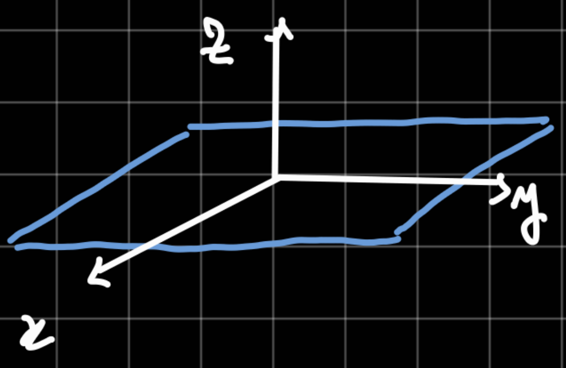
La simetría de traslación no es infinitesimal.

$$U(x) = U(x+na), \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$

Ahora: $\mathcal{L}(x+na, \dot{x}) = \mathcal{L}(x, \dot{x})$

No podemos desarrollar en Taylor

(c) Plano infinito



En principio

$$U(x+\epsilon, y+\delta, z) = U(x,y,z)$$

o sea $U(z)$. Las simetrías son:

(1) traslación en x: $x \mapsto x' = x + \epsilon$

(2) " en y $y \mapsto y' = y + \epsilon$

(3) rotación en z:

$$\begin{cases} x' = x\cos\epsilon + y\sin\epsilon \\ y' = -x\sin\epsilon + y\cos\epsilon \end{cases}$$

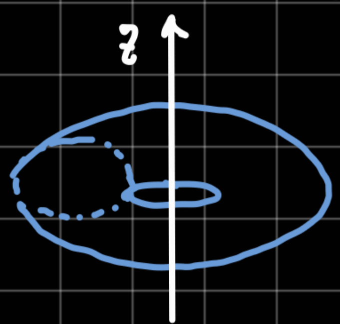
o sea $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\epsilon & \sin\epsilon \\ -\sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_z(\epsilon)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

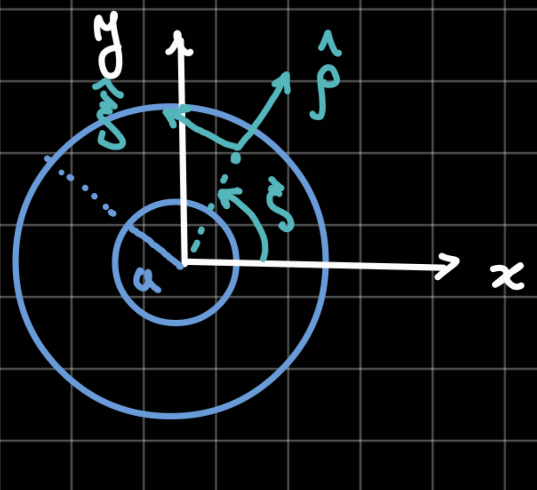
↳ ver que es simetría

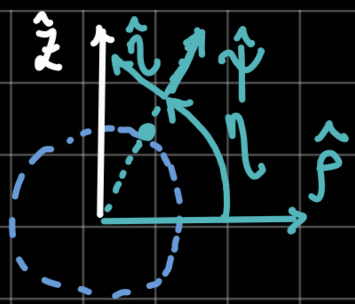
(4) De F3 sabemos: $$U(z) = \begin{cases} U & z > 0 \\ -U & z < 0 \end{cases}$$

si nos mantenemos en una de esas dos regiones se conserva p_z.

(f) toro circular







$$\begin{cases} \hat{\rho} = \cos\xi\,\hat{x} + \sin\xi\,\hat{y} \\ \hat{\xi} = -\sin\xi\,\hat{x} + \cos\xi\,\hat{y} \\ \hat{\psi} = \cos\eta\,\hat{\rho} + \sin\eta\,\hat{z} \\ \hat{\eta} = -\sin\eta\,\hat{\rho} + \cos\eta\,\hat{z} \end{cases}$$

$$\vec{r} = (a+b)\,\hat{\rho} + b\,\hat{\psi}$$

$\mathcal{L}$ debería quedar cíclico en ξ.

$\Rightarrow$ se conserva l_z.

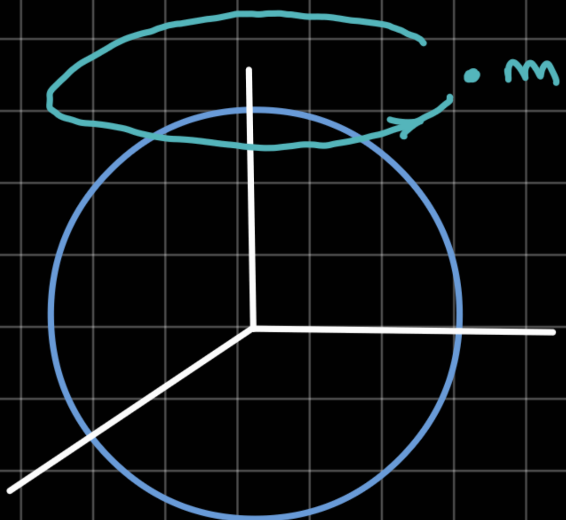
PROBLEMA 8 Potencial con simetría esférica.

$U(\vec{r}) = U(r)$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + U(r)$$

Sabemos que debe conservarse $\bar{l}$, pero sólo φ es cíclica ($\Rightarrow$ se conserva l_z).

¿Por qué θ no es cíclica?



rotar alrededor de $\hat{z}$ es trasladarse únicamente en φ

Las rotaciones más arbitrarias implican cambiar θ y φ en conjunto.

Para hacerla más fácil pasemos a cartesianas:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) + U(x^2+y^2+z^2)$$

Las rotaciones son simetría

- rotación en x:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\epsilon & \sin\epsilon \\ 0 & -\sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x \mapsto x' = x \\ y \mapsto y' = \cos\epsilon\, y + \sin\epsilon\, z \\ z \mapsto z' = -\sin\epsilon\, y + \cos\epsilon\, z \\ t \mapsto t' = t \end{cases}$$

Veamos primero que $x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$y'^2 + z'^2 = \cos^2\epsilon\, y^2 + \sin^2\epsilon\, z^2 + 2\cos\epsilon\sin\epsilon\, yz$$
$$- 2\sin\epsilon\cos\epsilon\, yz + \sin^2\epsilon\, y^2 + \cos^2\epsilon\, z^2$$
$$= y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow U(x'^2 + y'^2 + z'^2) = U(x^2 + y^2 + z^2)$$

Ahora hay que ver las velocidades

$$\begin{cases} \dot{x}' = \dot{x} \\ \dot{y}' = \cos\epsilon\, \dot{y} + \sin\epsilon\, \dot{z} \\ \dot{z}' = -\sin\epsilon\, \dot{y} + \cos\epsilon\, \dot{z} \end{cases}$$

$\rightarrow$ transforman igual que las coordenadas

$$\Rightarrow \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

$\Rightarrow$ las rotaciones en $\hat{z}$ son simetría.

$$\mathcal{L}(\dot{x}, \cos\epsilon\,\dot{y} + \sin\epsilon\,\dot{z}, -\sin\epsilon\,\dot{y} + \cos\epsilon\,\dot{z}, \dots)$$

$$= \mathcal{L}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, x, y, z)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \left(\cancel{-\sin\epsilon\, \dot{y}} + \underbrace{\cos\epsilon}_{=1}\, \dot{z} \Big|_{\epsilon=0} \right) + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} (-\dot{y})$$

$$+ \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} z + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(-y) = \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \dot{z} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} z - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \dot{z} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \dot{y} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) z - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) y = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} z - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} y \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} z - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} y = p_y z - p_z y = l_x$$

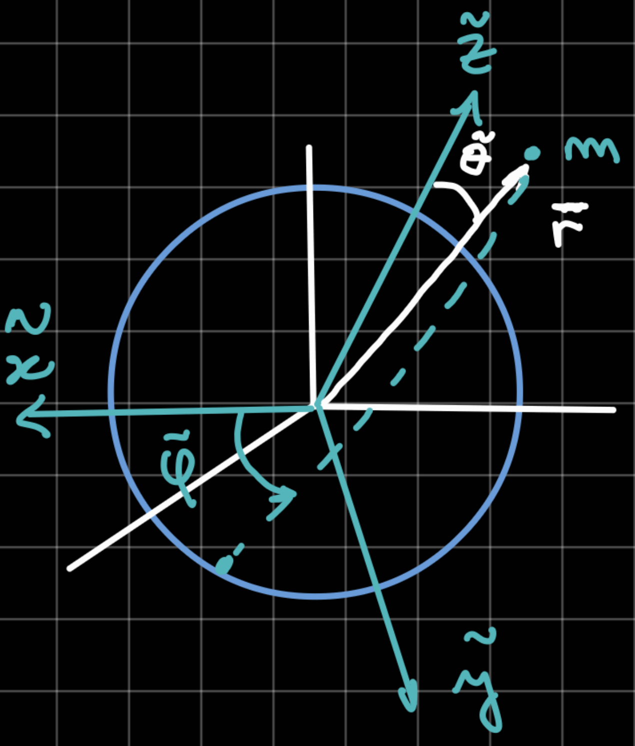
Análogamente pueden mostrar que se conserva l_y.

Obs: Podrían escribir la transformación de simetría a orden 1 en ϵ

$$\begin{cases} y' = y + \epsilon z \\ z' = z - \epsilon y \end{cases}$$

y pedir $L' = L + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ y sale igual.

Si queremos mostrar que rotar alrededor de un eje $\hat{\tilde{z}}$ arbitrario es simetría y, por lo tanto se conserva $l_{\tilde{z}}$ hay que definir otras coordenadas esféricas.



Escrito en estas coordenadas

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{\tilde{r}}^2 + \tilde{r}^2\dot{\tilde{\theta}}^2 + \tilde{r}^2\sin^2\tilde{\theta}\,\dot{\tilde{\varphi}}^2\right) - U(\tilde{r})$$

Acá queda claro que $\tilde{\varphi}$ es cíclico.

PROBLEMA 12 : Partícula en un campo gravitatorio $\bar{g} = -g\,\hat{z}$.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$$

(1) Traslación en x → se conserva $p_x = m\dot{x}$

(2) Traslación en y → se conserva $p_y = m\dot{y}$

(3) Traslación en z → (?)

Es evidente que la transformación:

$$\begin{cases} x \mapsto x' = x \\ y \mapsto y' = y \\ z \mapsto z' = z + \epsilon \\ t \mapsto t' = t \end{cases}$$

NO deja invariante el lagrangiano.

$$\mathcal{L}(x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}', t') =$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mg(z + \epsilon)$$

$$= \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) - mg\epsilon$$

Notemos que, en general, si

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon \frac{dF}{dt}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

La acción no varía (salvo una constante)

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' \mathcal{L}' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\mathcal{L} + \epsilon \frac{dF}{dt} \right]$$

$$= S + \epsilon \left[F(\bar{q}(t_2), \dot{\bar{q}}(t_2), t_2) - F(\bar{q}(t_1), \dot{\bar{q}}(t_1), t_1) \right]$$

y eso no cambia la física (ecuaciones de mov.) del problema.

En nuestro caso: $F = -mgt$

$$\mathcal{L}(x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}', t') = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) - \epsilon mg$$

$$\mathcal{L}(x, y, z+\epsilon, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) - \epsilon mg$$

$$\Rightarrow \quad \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -\epsilon mg$$

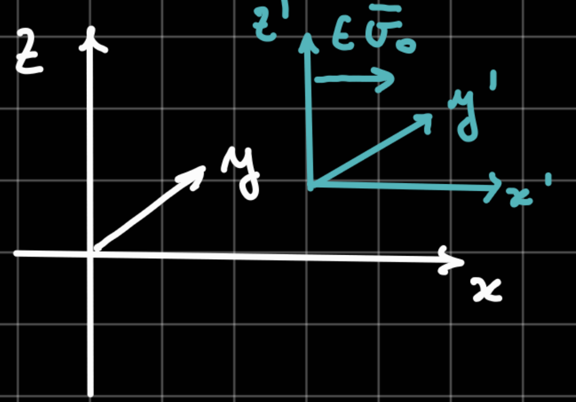
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} + mgt\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[m\dot{z} + mgt\right] = 0$$

$\Rightarrow \quad v_{0z} = \dot{z} + gt$ se conserva

De hecho, esto nos da que $\ddot{z} = -g$.

Escribamos cambios infinitesimales de sistema de referencia.



$$\begin{cases} x \mapsto x' = x - \epsilon t \\ y \mapsto y' = y \\ z \mapsto z' = z \\ t \mapsto t' = t \end{cases}$$

Notemos que $\dot{x}' = \dot{x} - \epsilon$ y entonces $\mathcal{L}$ no es invariante

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2}\left(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2\right) - mgz'$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \epsilon^2 - 2\epsilon\dot{x} + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz$$

$$= \mathcal{L} + \epsilon^2 \frac{m}{2} - m\epsilon\dot{x}$$

Expandimos el lado izquierdo

$$\mathcal{L}(x', \dot{x}', t) = \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(-t) + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}(-1)$$

$$\Rightarrow \quad -\epsilon t \frac{\partial L}{\partial x} - \epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \cancel{\frac{m}{2}\epsilon^2} - m\epsilon \dot{x}$$

$\mathcal{O}(\epsilon^2)$

$$\epsilon\left[t \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + m\dot{x} \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} t + m x \right) = 0 \qquad \boxed{x = x_0 + \frac{p_x}{m} t}$$

$$\Rightarrow \quad -m\dot{x} t + m x = C \Rightarrow -x_0 = x - \underbrace{\dot{x}}_{cte} t$$

Análogamente,

$$-y_0 = y - \dot{y} t \rightarrow \boxed{y = y_0 + \frac{p_y}{m} t}$$

En z pasa lo mismo sólo que

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon^2 \frac{m}{2} - \epsilon \dot{z} + mg\epsilon t$$

$$\Downarrow$$

$$\epsilon\left[-t \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} + m\dot{z} - mgt \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[-\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} t + m z - \frac{mgt^2}{2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\dot{z}t + z - \frac{gt^2}{2} = z_0$$

$$\Rightarrow \quad z = z_0 + \dot{z}t + \frac{gt^2}{2}$$ → ojo $\dot{z}$ no es cte.

$$\dot{z} = v_0 - gt$$

$$z = z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Moraleja: si tenemos n GL, con $2n$ cantidades conservadas "podemos" resolver el problema sin resolver ninguna ec. dif.

Bonus Track: Demostración del Teorema

Consideremos una transformación general

$$\begin{cases} \bar{q} \mapsto \bar{q}' = \bar{q} + \epsilon \bar{\eta}(\bar{q}, t) \\ t \mapsto t' = t + \epsilon \Theta(\bar{q}, t) \end{cases}$$

El problema es que así $\bar{q}'$ está como función de t y no de t':

$$\dot{\bar{q}}' = \frac{d\bar{q}'}{dt'} = \frac{d\bar{q}'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{\dot{\bar{q}} + \epsilon \dot{\bar{\eta}}}{1 + \epsilon \dot{\Theta}}$$

A orden 1 en ϵ:

$$\dot{\bar{q}}' = (\dot{\bar{q}} + \epsilon \dot{\bar{\eta}})(1 - \epsilon \dot{\Theta}) = \dot{\bar{q}} + \epsilon (\dot{\bar{\eta}} - \dot{\bar{q}} \dot{\Theta})$$

Ahora sí, veamos cómo queda la acción:

$$S' = \int_{t_1'}^{t_2'} dt' \mathcal{L}(\bar{q}', \dot{\bar{q}}', t') = \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(\bar{q}', \dot{\bar{q}}', t) \frac{dt'}{dt}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \; \mathcal{L}\left(\bar{q} + \epsilon \bar{\eta}, \dot{\bar{q}} + \epsilon(\dot{\bar{\eta}} - \dot{\bar{q}}\dot{\theta}), t + \epsilon\theta\right) \frac{dt'}{dt}$$

Para que la acción quede invariante salvo una constante:

$$\mathcal{L}\left(\bar{q} + \epsilon \bar{\eta}, \dot{\bar{q}} + \epsilon(\dot{\bar{\eta}} - \dot{\bar{q}}\dot{\theta}), t + \epsilon\theta\right) \frac{dt'}{dt}$$

$$\shortparallel$$

$$\mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) + \epsilon \frac{dF}{dt}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

Expandimos a orden 1 en ϵ el término de la izquierda:

$$\left[\mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}} \cdot \bar{\eta} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}(\dot{\bar{\eta}} - \dot{\bar{q}}\dot{\theta}) + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\theta\right] \frac{dt'}{dt}$$

$$\shortparallel$$

$$\mathcal{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) + \epsilon \frac{dF}{dt}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t)$$

OJO: $\frac{dt'}{dt} = 1 + \epsilon\dot{\theta}$

$$\cancel{\mathcal{L}} + \epsilon\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}}\cdot\bar{\eta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\left(\dot{\bar{\eta}} - \dot{\bar{q}}\dot{\Theta}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}\Theta + \mathcal{L}\dot{\Theta}\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\cancel{\mathcal{L}} + \epsilon\frac{dF}{dt}$$

Ahora queda evaluar sobre E-L: $\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{q}} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\right) \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\dfrac{dh}{dt} \end{cases}$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\right)\cdot\bar{\eta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\cdot\dot{\bar{\eta}}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\cdot\bar{\eta}\right)} \underbrace{- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\dot{\bar{q}}\dot{\Theta} - \frac{dh}{dt}\Theta + \mathcal{L}\dot{\Theta}}_{-\frac{d}{dt}\left(h\Theta\right)} = \dot{F}$$

$$h \to \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\dot{\bar{q}} - \mathcal{L}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\cdot\bar{\eta} - h\Theta - F\right] = 0$$

$$\boxed{C(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{q}}}\cdot\bar{\eta} - h\Theta - F}$$

→ esto se conserva

:)