Bruno Sinilotti

Clase de Meca

Ejercicio 15: Una partícula de masa m y carga q está en un campo electromagnético con potenciales φ y $\vec{A}$. $\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

A partir del Lagrangiano $L = T - U$, donde $U = q\left(\phi - \frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{A}\right)$, es un potencial generalizado dependiente de la velocidad. Muestre que la fuerza aplicada sobre la partícula es la fuerza de Lorentz, $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)$

Rta:

Pensemos antes de resolver lo que nos pide el ejercicio, porqué el Lagrangiano tiene que ser así.

Sabemos que el Lagrangiano es un escalar y las variables que tenemos a disposición para construirlo son: $\vec{r}, \vec{v}, \phi, \vec{A}$

↳ decimos que tenemos estas variables y no directamente los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ porque las ecuaciones de movimiento salen de derivar L, y sabemos que las ec. de mov. de una partícula cargada no involucran derivadas de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

La parte cinética es la usual: $T = \frac{m}{2}\vec{v}^2$

y para el potencial veamos que términos nos podemos armar.

Como L debe ser un escalar, podría aparecer:
- $f(\phi)$ ⇝ alguna función escalar de φ
- $\vec{A}\cdot\vec{r}$
- $\vec{A}\cdot\vec{v}$

Entonces, el Lagrangiano más sencillo que nos podemos armar con estos bloques es

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \alpha \phi - \beta \vec{A}\cdot\vec{v} - \gamma \vec{A}\cdot\vec{r}$$ Ca $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ cte

Pero sabemos que el electromagnetismo tiene la simetría de gauge:

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla\chi$$

$$\phi \to \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Si hacemos este cambio la física no debería cambiar. ¿Cómo cambia el L propuesto?

$$L \to \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \alpha\phi + \frac{\alpha}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \beta \vec{A}\cdot\vec{v} - \beta \vec{\nabla}\chi\cdot\vec{v} - \gamma\vec{A}\cdot\vec{r} - \gamma\vec{\nabla}\chi\cdot\vec{r}$$

$$= L + \frac{\alpha}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \beta\nabla\chi\cdot\vec{v} - \gamma\vec{\nabla}\chi\cdot\vec{r}$$

y $$\frac{\alpha}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \beta\nabla\chi\cdot\vec{v} = \frac{\alpha}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \beta\left[\frac{\partial\chi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\chi}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\chi}{\partial z}\dot{z}\right]$$

es igual a $-\beta\frac{d\chi}{dt}$ si $\frac{\alpha}{c} = -\beta$

Las derivadas totales no influyen en el Lagrangiano

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\alpha}{c} = -\beta}$

y el término $\nabla\chi\cdot\vec{r}$ no puede escribirse como una derivada total $\Rightarrow \gamma = 0$ para tener un L invariante de gauge

Así, llegamos a nuestro L invariante de gauge:

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - \alpha\left[\phi - \frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{A}\right]$$

Para fijar α calculamos directamente las ec de mov y fijamos cómo tiene que ser α para recuperar las ec de mov conocidas.

Por unidades sabemos que tiene que tener unidades de q

Ec. de E-L: $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = 0$

Vamos a hacer para x, las de y y las de z son análogas

- $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}m\vec V^2 - \alpha\left(\phi - \frac{\vec V}{c}\cdot\vec A\right)\right] = -\alpha\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\vec V}{c}\cdot\frac{\partial \vec A}{\partial x}\right)$

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot x}\left[\frac{1}{2}m\vec V^2 - \alpha\left(\phi - \frac{\vec V}{c}\cdot\vec A\right)\right]\right\}$

$$= \frac{d}{dt}\left\{m\dot x + \frac{\alpha}{c}A_x\right\} = m\ddot x + \frac{\alpha}{c}\frac{dA_x}{dt} = m\ddot x + \frac{\alpha}{c}\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot x + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot y + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot z + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right]$$

$\phi = \phi(x,y,z)$
$\vec A = \vec A(x,y,z)$

$\Rightarrow$ Las ecs de E-L quedan:

$$-\alpha\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\vec V}{c}\cdot\frac{\partial \vec A}{\partial x}\right) - m\ddot x - \frac{\alpha}{c}\left[\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot x + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot y + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot z + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right] = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot x = \alpha\left[\overbrace{-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}}^{E_x} + \cancel{\frac{\dot x}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}} + \frac{\dot y}{c}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\dot z}{c}\frac{\partial A_z}{\partial x} - \cancel{\frac{\dot x}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}} - \frac{\dot y}{c}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\dot z}{c}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right]$$

$$= \alpha\left[E_x + \frac{\dot y}{c}\underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{+B_z} + \frac{\dot z}{c}\underbrace{\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)}_{-B_y}\right]$$

$$= \alpha\left[E_x + \underbrace{\frac{\dot y B_z}{c} - \frac{\dot z B_y}{c}}_{\left(\frac{\vec V\times\vec B}{c}\right)_x}\right] \Rightarrow m\ddot x = \alpha\left[E_x + \left(\frac{\vec V\times\vec B}{c}\right)_x\right]$$

Para recuperar la $\vec F_{Lorentz}$ $\alpha = q$

$$\Rightarrow \boxed{\text{de } L = \frac{1}{2}m\vec V^2 - q\left[\phi - \frac{\vec V}{c}\cdot\vec A\right] \text{ llegamos con las E-L a } m\ddot{\vec x} = q\left[\vec E + \frac{\vec V}{c}\times\vec B\right]}$$

Conatorio Portafolio

Obtención la dinámica de la partícula sometida a un campo eléctrico y magnético externo mediante Euler Lagrange.

¿Y la dinámica de los campos? -> sabemos que la dinámica de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ está dada por las ec. de Maxwell:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J}$$

Al igual que la dinámica de la partícula puede obtenerse de extremar el Lagrangiano que vimos, ¿se puede obtener la dinámica del campo electromagnético de una forma análoga?

¡Sí!! Pero ahora el Lagrangiano tiene que tener como variable al campo $\vec{A}$ y ϕ

$$L[\phi, \vec{A}]$$

Mecánica clásica de campos ; sistema a infinitos gl

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0}\underbrace{F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}}_{\text{Término cinético}} - \underbrace{A_\alpha J^\alpha}_{\text{acople del campo con la materia}}$$

(Convenio de suma de Einstein)

$$\underbrace{A^\alpha = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)}_{\text{"cuadripotencial"}} , \quad \underbrace{J^\alpha = (c\rho, \vec{J})}_{\text{cuadricorriente}} , \quad F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Euler Lagrange para campos:

$$\partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\alpha)}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0$$

de aquí salen las ec. de Maxwell