

## Guía 3 - Fuerzas Centrales

Hagamos un pequeño repaso teórico para que tengan las herramientas necesarias para hacer los ejercicios. Suponemos que tenemos un sistema de dos cuerpos en presencia de un potencial central. El Lagrangiano se separa en una parte para el centro de masa y en otra para el movimiento de la diferencia entre las posiciones de los cuerpos, que llamaremos  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\mathcal{L}_T = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) = \mathcal{L}_{CM} + \mathcal{L}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (1)$$

Como  $\vec{V}_{CM} = cte$  (usar E-L) nos enfocamos en  $\mathcal{L}$ . Lo próximo es usar que el movimiento es plano debido a que la fuerza es central. ¿Por qué? Por un lado  $\vec{L}$  se conserva en módulo y dirección, porque  $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$  (ver también ejercicio 13 de la guía 2). Por otro lado,  $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$ . Es decir que  $\vec{L}$  apunta siempre en una dirección (que la tomaremos como  $\hat{z}$ ) y  $\vec{r}$  es perpendicular a esa dirección, por lo que el movimiento es plano. Usando coordenadas polares

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (2)$$

Las ecuaciones de E-L ( $r$  y  $\varphi$ ) y de conservación ( $h$ ) nos dicen que

$$r) \quad \mu \ddot{r} = \mu r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \quad (3)$$

$$\varphi) \quad \mu r^2 \dot{\varphi} = \ell = cte \Rightarrow \mu r^2 d\varphi = \ell dt \quad (4)$$

$$h) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow h = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - \mathcal{L} = cte \quad (5)$$

Como  $\varphi$  es cíclica, obtenemos la conservación del momento angular en  $\hat{z}$ ,  $\ell$ . En cuanto a  $h$ , podemos hacer la cuenta explícitamente y ver que  $h = T + V$  es la energía en este caso. O más rápido, podemos argumentar que  $h = E$  debido a que la cinética es homogénea de grado dos en las velocidades,  $T(r, \lambda \dot{r}, \lambda \dot{\varphi}) = \lambda^2 T(r, \dot{r}, \dot{\varphi})$ , y el potencial no depende de las velocidades.

Se abren dos caminos para resolver la dinámica. Una opción es resolver la ecuación diferencial de E-L en  $r$ . Otra opción es reducir el problema a uno unidimensional reemplazando la conservación de  $\ell$  en la de  $E$

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{eff}, \quad V_{eff} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad \Longrightarrow \quad \mu \ddot{r} = -\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} \quad (6)$$

Si queremos más información podemos integrar esta expresión para hallar  $r(t)$ . Sin embargo, esa integral suele ser muy complicada de realizar. Un poco más simple resulta pasar de  $r(t)$

a  $r(\varphi)$  usando la relación entre  $d\varphi \leftrightarrow dt$  dada por la conservación de  $\ell$  en (4). En ese caso debemos resolver la integral

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^t \frac{\ell}{\mu r^2} dt = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu r^4}{\ell^2}(E - V) - r^2}} \quad (7)$$

Resulta que resolver la integral en (7) sigue siendo bastante difícil. Hay dos casos en que la integral es simple y se puede hacer analíticamente: una es la gravitatoria/Kepler/Coulomb,  $V = -k/r$ , y otra es la elástica isótropa,  $V = kr^2/2$ . Ambas llevan como solución la ecuación de las cónicas. El truquito está en usar la siguiente integral [Goldstein Eq. (3.51)]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \cos^{-1}\left(-\frac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right) \quad (8)$$

La solución depende de las condiciones iniciales y del potencial.

**Ejercicio 2:** Nos dan el potencial de un oscilador isótropo,  $V(r) = \frac{k}{2}r^2$ .

a) *Escriba el Lagrangiano justificando por qué el movimiento es plano. Estudie el problema unidimensional equivalente.*

Lo que nos pide el inciso es lo que hicimos más arriba hasta la ecuación (6), lo puse como introducción porque vale para cualquier potencial central. El potencial efectivo es

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{ef}(r), \quad V_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2 \quad (9)$$

donde suponemos que tenemos una sola partícula, por eso aparece  $m$  en vez de  $\mu$ .

b) *Grafique el potencial efectivo para un caso general. Encuentre el radio, la energía y el período para el caso en que la órbita es circular. Analice su estabilidad.*

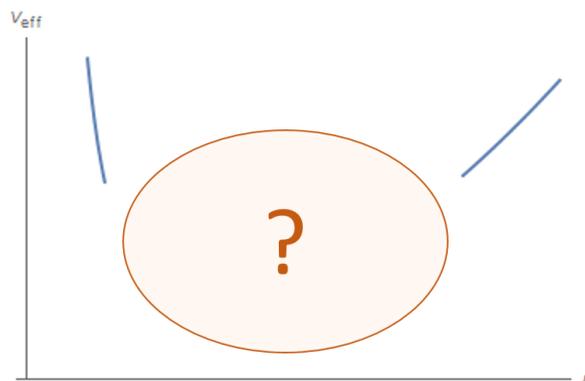
Podemos decir que hay dos formas de dibujar  $V_{ef}(r)$ . La primera, más cualitativa, sería graficar los dos términos de  $V_{ef}(r)$  por separado y luego dibujar su suma. El problema es que, dependiendo del valor de las constantes del problema (como  $k, \ell$ ), pueden haber varios casos posibles, dificultándose enormemente para potenciales más complejos. La segunda, más cuantitativa, es hacer un “análisis funcional” del  $V_{ef}(r)$ .

El análisis funcional consiste en mirar:

- Los límites. En nuestro caso,  $V_{ef}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \pm\infty} +\infty$ .
- Puntos críticos  $r_i$ . Aquí hay uno solo:  $\frac{dV_{ef}}{dr} = 0 \Leftrightarrow r_c^4 = \frac{\ell^2}{mk} \ (r > 0)$ .
- Estabilidad. Los puntos críticos son

$$\left. \frac{d^2V_{ef}}{dr^2} \right|_{r_i} < 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Máximo} \\ \text{(inestable)} \end{array} \quad \left| \quad \frac{d^2V_{ef}}{dr^2} \right|_{r_i} > 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Mínimo} \\ \text{(estable)} \end{array} \quad (10)$$

De los límites vistos en el análisis funcional sabemos que el gráfico debe tener la pinta



En cuanto a la estabilidad, para el oscilador  $r_c$  resulta ser un mínimo (les dejo la cuenta de derivar dos veces y reemplazar). Notar que no siempre es necesario hacer la cuenta, a veces se puede ver la estabilidad gráficamente. Aquí, como la función empieza y termina en  $+\infty$  y hay un único punto crítico, no le queda otra que ser un mínimo. Ahora sí podemos graficar el  $V_{ef}(r)$  de la figura 1 ( $r > 0$  siempre), con un valor arbitrario de energía en rojo.

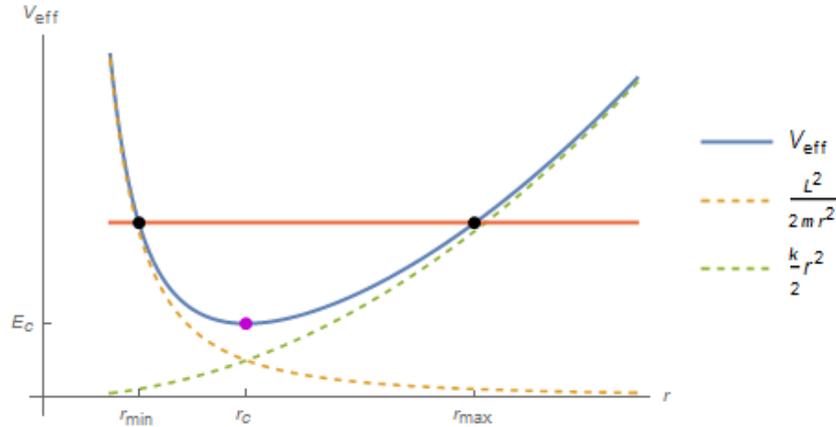


Figura 1: Potencial efectivo del oscilador isótropo bidimensional.

Podemos completar el análisis hallando los puntos de retorno, definidos como los puntos donde  $\dot{r} = 0$  y por lo tanto  $E = V_{ef}(r)$

$$E = V_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r_{\pm}^2 = \frac{E}{k} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{E_c}{E}\right)^2} \right] \quad (11)$$

Vemos que  $r_-$  corresponde al radio mínimo y  $r_+$  al radio máximo.

Este potencial aparece en el ejercicio 20 de la guía 1, donde se resuelve usando cartesianas, hallando  $x(t)$  e  $y(t)$ . La versión de la guía 3 sería resolverlo hallando  $r(\varphi)$  según la ecuación (7), usando el truquito de la ecuación (8). Pero aquí no nos piden tanto.

De acá viene el famoso dicho de Sidney Coleman (físico de altas energías) ‘la carrera de un físico consiste en resolver el problema del oscilador armónico en niveles crecientes de abstracción’. Y lo van a volver a hacer, en su versión cuántica. Y de campos. Y de campos cuántica. Y en la guía 6 y 7, usando el formalismo Hamiltoniano.

### ÓRBITA CIRCULAR

Ya hallamos su radio  $r_c$ . Como el radio es constante, entonces  $\dot{r} = 0$  y la energía es

$$E_c = V_{ef}(r_c) \quad \Rightarrow \quad E_c = l\sqrt{\frac{k}{m}} = kr_c^2 \quad (12)$$

Para un movimiento general, encontrar el período no es tarea simple porque se necesita hallar una expresión para  $\varphi(t)$ . Recordemos que estamos usando polares, así que el período de

revolución  $\tau_\varphi$  se define como

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \varphi(t) \\ y(t) = r(t) \sin \varphi(t) \end{cases} \Rightarrow \varphi(\tau_\varphi) = 2\pi \quad (13)$$

Pero si la órbita es circular el asunto se vuelve casi trivial. La clave está en notar que, debido a la conservación de momento angular (4), si el radio es constante entonces también es constante la velocidad angular

$$\dot{\varphi}_c = \frac{\ell}{mr_c^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \equiv \omega_\varphi \Rightarrow \tau_\varphi = \frac{2\pi}{\omega_\varphi} \quad (14)$$

c) *Discuta los movimientos posibles en función del valor de la energía. ¿Cómo se modifica el movimiento si, manteniendo la energía constante, aumenta el momento angular? Piense en el límite  $\ell \rightarrow 0$ .*

Primero que nada, para que haya movimiento la energía debe ser mayor o igual a  $E_c$ . Si  $E = E_c$  la órbita será un círculo de radio  $r_c$ . En un caso general podemos interpretar *cualitativamente* como es la órbita a partir de la figura 1: la partícula describe un movimiento acotado entre dos radios (si  $E \neq E_c$ ). Y eso es todo lo que podemos decir mirando el  $V_{ef}(r)$ . ¿Serán elipses? ¿Serán rombos? Solo aquel que halle  $r(\varphi)$  lo sabrá.

Las c.i. nos fijan el valor de  $E$  y  $\ell$ . En el ejercicio nos preguntan por el caso en que las c.i. varían de forma tal que  $\ell$  cambie pero  $E$  no. En la figura 2 está el gráfico del potencial efectivo para dos valores de  $\ell$  con la misma energía.

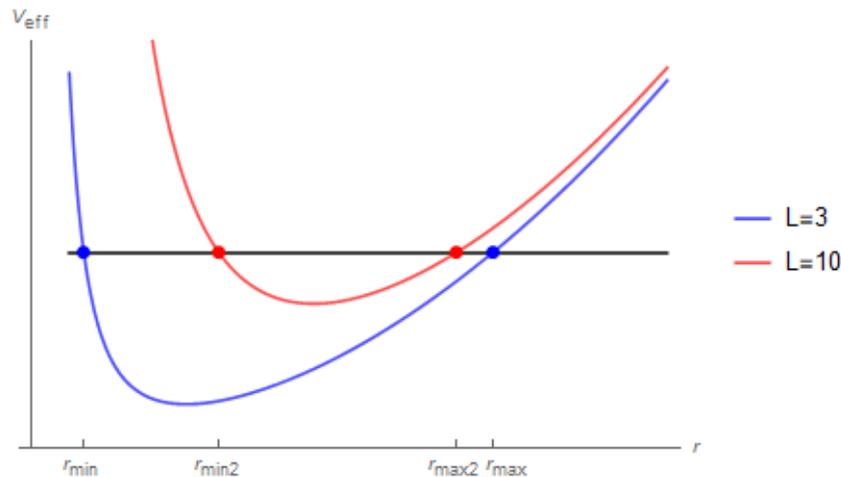


Figura 2: Potencial efectivo del oscilador para distintos valores de  $\ell$ , con  $E$  fija.

Como vemos  $r_{min}$  aumenta y  $r_{max}$  disminuye. También podíamos ver esto de la ecuación (11), que graficamos en la figura 3 en función de  $\ell$ . Chequeemos algún caso límite. Vemos que si  $\ell \rightarrow 0$  entonces  $r_{min} \rightarrow 0$ . La trayectoria resultante sería una recta cayendo hacia el origen.

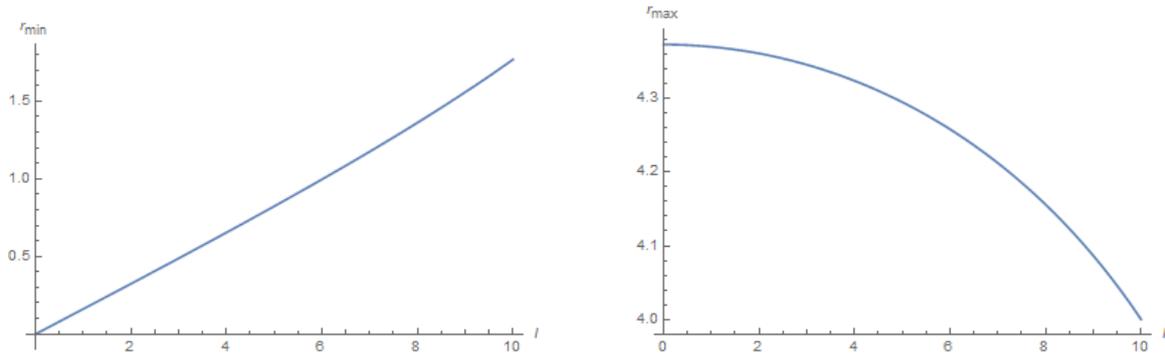


Figura 3:  $r_{min}$  (izquierda) y  $r_{max}$  (derecha) en función de  $l$  para  $m = 1$ ,  $k = 2$  y  $E = 19$ .

d) Describa la naturaleza de las órbitas cuando difieren levemente de la órbita circular. Encuentre la frecuencia de oscilación radial. Haga este mismo cálculo para el problema de Kepler y compare ambos casos.

Si la órbita difiere de la circular en una cantidad  $\epsilon$  pequeña, entonces podemos hacer un Taylor del potencial efectivo alrededor de  $r = r_c + \epsilon$

$$V_{ef}(r) \simeq V_{ef}(r_c) + \left. \frac{\partial V_{ef}(r)}{\partial r} \right|_{r_c} (r - r_c) + \left. \frac{\partial^2 V_{ef}(r)}{\partial r^2} \right|_{r_c} \frac{(r - r_c)^2}{2} \quad (15)$$

donde el término lineal se anula porque  $r_c$  es un mínimo del potencial. Si reemplazamos esta expresión en la ecuación diferencial de (6) (es derivar la ecuación de la energía), llegamos a la ecuación de un oscilador

$$m\ddot{r} = -\left. \frac{\partial V_{ef}}{\partial r} \right|_{r_c} \Rightarrow m\ddot{\epsilon} \simeq -\left. \frac{\partial^2 V_{ef}(r)}{\partial r^2} \right|_{r_c} \epsilon = -\omega_r^2 m\epsilon \quad (16)$$

Órbitas que difieren levemente de la circular oscilan entre dos radios con frecuencia radial  $\omega_r$

$$r(t) = r_c + A \cos(\omega_r t + \delta), \quad \omega_r = \sqrt{\left. \frac{1}{m} \frac{\partial^2 V_{ef}(r)}{\partial r^2} \right|_{r_c}} = 2 \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \omega_\varphi \quad (17)$$

Como  $\tau \sim 1/\omega \Rightarrow \tau_\varphi = 2\tau_r$ . Para una elipse centrada en el origen (que es nuestro caso) esto tiene sentido: si empezó en el semieje mayor  $r_{max}$ , cuando la partícula recorra media vuelta de  $A$  a  $C$  el radio volverá a su valor original del semieje mayor  $r_{max}$ , completando un período radial. Cuando recorre toda la vuelta, volverá al valor de  $r_{max}$  completando dos períodos radiales.

¿Qué pasa en Kepler? Reinterpreten esta explicación.

