

Guía 3 - Fuerzas Centrales

Dejemos un pequeño repaso teórico. Para un sistema de dos cuerpos en presencia de un potencial central, descrito desde el CM el Lagrangiano se separa en

$$\mathcal{L}_T = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}_{CM}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(r) = \mathcal{L}_{CM} + \mathcal{L}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (1)$$

Como $\vec{V}_{CM} = cte$ (usar E-L) nos enfocamos en \mathcal{L} . Lo próximo es usar que el movimiento es plano debido a que la fuerza es central. ¿Por qué? Por un lado \vec{L} se conserva en módulo y dirección, porque $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ (ver también ejercicio 13 de la guía 2). Por otro lado, $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$. Es decir que \vec{L} apunta siempre en una dirección (que la tomaremos como \hat{z}) y \vec{r} es perpendicular a esa dirección, por lo que el movimiento es plano. Usando coordenadas polares

$$\mathcal{L}(r, \dot{r}, \dot{\varphi}) = T - V = \frac{\mu}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) \quad (2)$$

Combinando las ecuaciones de conservación (φ y t son cíclicas) vimos que podemos reducir el problema a uno unidimensional equivalente reemplazando la conservación de ℓ en la de E

$$E = \frac{\mu}{2} \dot{r}^2 + V_{ef}, \quad V_{ef} = \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + V(r) \quad \implies \quad \mu \ddot{r} = -\frac{\partial V_{ef}}{\partial r} \quad (3)$$

Esta es una ecuación diferencial (de primer orden) para $r(t)$. Más simple resulta pasar de $r(t)$ a $r(\varphi)$. En ese caso debemos resolver la integral

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{\ell}{\sqrt{2\mu r^4 [E - V_{ef}(r)]}} dr \quad (4)$$

Para los potenciales particulares de Kepler/Coulomb ($V = -k/r$) y el elástico isótropo ($V = kr^2/2$) la integral se puede hacer analíticamente mediante la siguiente propiedad [Goldstein Eq. (3.51)]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \cos^{-1} \left(-\frac{2\gamma x + \beta}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}} \right) \quad (5)$$

La solución depende de las condiciones iniciales y del potencial. Ambos potenciales llevan como solución la ecuación de las cónicas.

INTERLUDIO: KEPLER Y LAS CÓNICAS

Haciendo el análisis funcional que mencioné la clase anterior (mirar límites + puntos críticos + estabilidad), uno puede graficar el potencial efectivo de Kepler de la figura 4.

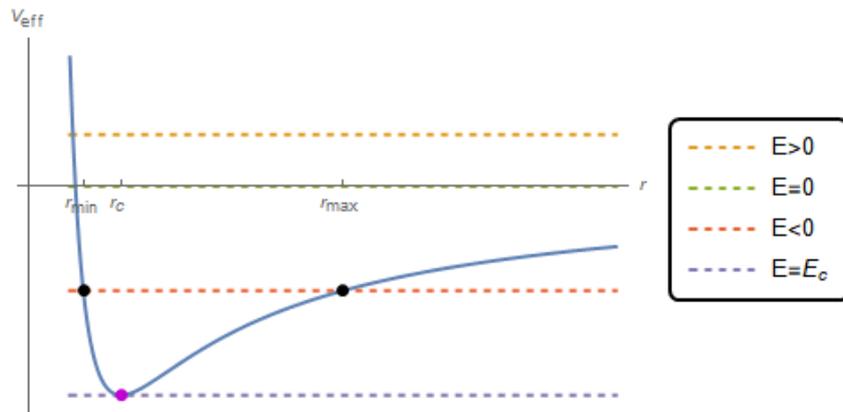


Figura 1: Potencial efectivo de Kepler para distintos valores de energía.

Como vemos hay 4 tipos de órbitas diferentes según el valor de la energía. Mirando solo el V_{ef} lo único que podemos decir es que son acotadas si $E < 0$ (se mueve entre dos radios) y no-acotadas si $E \geq 0$ [hay un punto de máximo acercamiento cuando $E = V_{ef}(r_m)$ y luego se aleja hacia infinito]. En particular, si $E = E_c$ la órbita será circular. Para decir algo más sobre la forma de la trayectoria hay que encontrar la ecuación de la órbita $r(\varphi)$. En la teoría vieron que, usando la integral (5), se llega a la llamada ‘ecuación de las cónicas’, que es una ecuación polar con el foco en el origen (existen otras soluciones según las condiciones iniciales)

$$r(\varphi) = \frac{B^2/A}{1 + e \cos(\varphi)}, \quad \begin{cases} e > 1, E > 0 : & \text{Hipérbola} \\ e = 1, E = 0 : & \text{Parábola} \\ e < 1, E < 0 : & \text{Elipse} \\ e = 0, E = -|E_c| : & \text{Círculo} \end{cases} \quad (6)$$

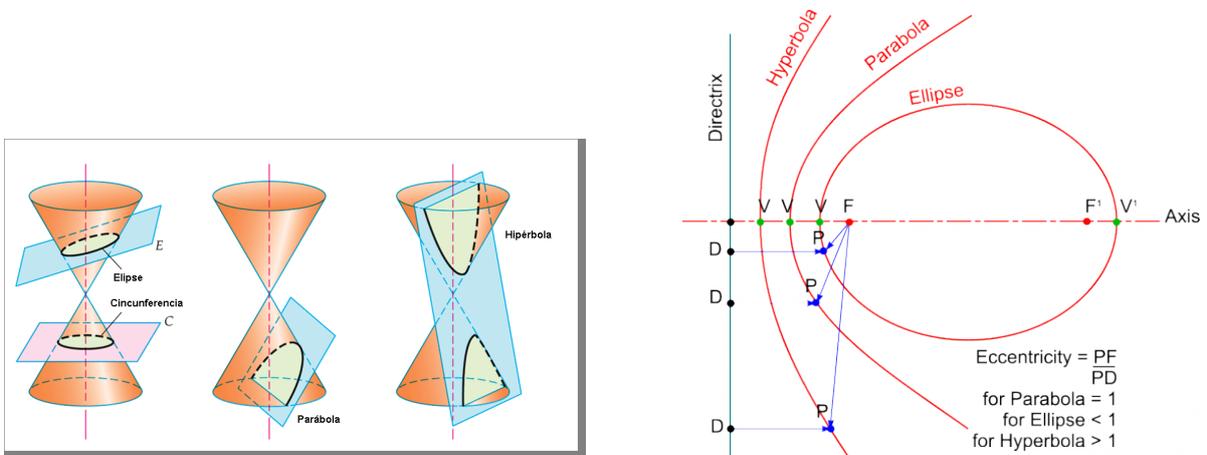


Figura 2: Cónicas para distintos valores de excentricidad e .

Las 4 tipos de órbitas, ilustradas en la figura 2, se distinguen según el valor de la *excentricidad* e (que depende de E) (gif). El significado de A y B cambia según la órbita. ¿Che y por qué se llaman cónicas? Porque viene de rebanar un cono de distintas maneras [figura 2] (gif). Centrémonos para este ejercicio en la elipse, que es como orbitan los planetas.

- **Elipse:** En este caso A representa el semi-eje mayor de la elipse y B el menor. Sin embargo la ecuación polar (6) no tiene su origen en el centro de la elipse, sino en uno de sus focos (F), como en el panel derecho de la figura 3. Esto del foco, ¿les recuerda algo a las lentes de F2? (imagen). Como nuestro $r(\varphi)$ se mide desde el foco, en vez de alcanzar los valores A y

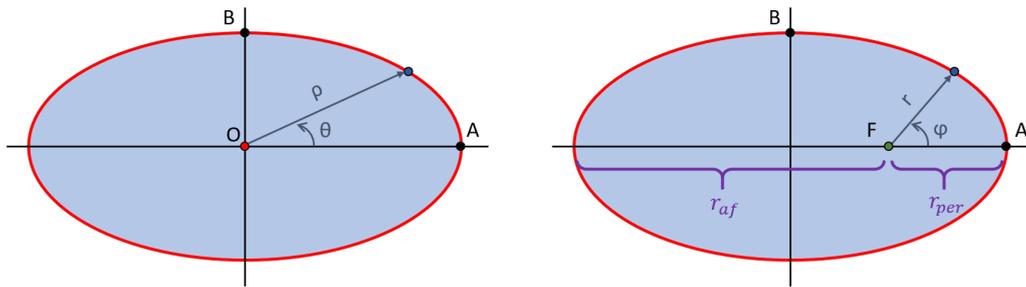


Figura 3: Izquierda: elipse desde el centro. Derecha: elipse desde el foco.

B , tendremos una distancia de máximo acercamiento o *perihelio* en $\varphi = 0$, y otra de máximo alejamiento o *afelio* en $\varphi = \pi$. Estos radios pueden expresarse como

$$r_{per} = A(1 - e), \quad r_{af} = A(1 + e), \quad e = \frac{F}{A} = \sqrt{1 - \frac{B^2}{A^2}} \quad (7)$$

Para el caso particular de Kepler ($V = -k/r$), los valores de los semiejes y de excentricidad son ($E = -|E| < 0$)

$$B = \frac{\ell}{\sqrt{2\mu|E|}}, \quad A = \frac{k}{2|E|} \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{1 - \frac{2\ell^2}{\mu k^2}|E|} \quad (8)$$

También podemos hallar el período. Aunque no despejamos $\varphi(t)$, hay otro camino. La idea es que la órbita se completa cuando se recorre todo el área, y conocemos el área de una elipse. Luego, partiendo de la segunda ley de Kepler

$$\frac{dA_r}{dt} = \frac{\ell}{2\mu} \Rightarrow \int_0^\tau dt = \frac{2\mu}{\ell} \int_0^{A_r} dA_r \Rightarrow \tau = 2\pi \frac{\mu AB}{\ell} \propto A^{3/2} \quad (9)$$

donde usamos que el área de la elipse es $A_r = \pi AB$ y despejamos B en función de A (¿les suena a algo de la tercera ley?).

Ejercicio 3

Nos dan una fuerza de Kepler modificada, con un término extra c/r^3

$$F(r) = \frac{c}{r^3} - \frac{k}{r^2} = -\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{c}{2r^2} - \frac{k}{r} \quad (10)$$

a) Hallar la ecuación de la órbita.

Notar que el término extra se parece al potencial centrífugo, los dos van como $1/r^2$. Así que cuando escribamos el potencial efectivo podemos juntarlos en un único término

$$V_{ef}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{\bar{\ell}^2}{2mr^2} - \frac{k}{r}, \quad \bar{\ell}^2 = \alpha^2 \ell^2, \quad \alpha^2 = 1 + \frac{mc}{\ell^2} \quad (11)$$

El interludio de recién fue para recordar Kepler común, que es cuando $c = 0$ y $\alpha = 1$. Vemos que el nuevo potencial efectivo es igual al de Kepler con la modificación $\ell \rightarrow \bar{\ell} = \alpha\ell$. La pregunta es: ¿qué cambia ese α ?

Vemos que la forma funcional de V_{ef} no cambió, solo se modificó el valor de una constante. Todo el análisis que hicimos del V_{ef} se mantiene; hay 4 tipos de órbitas según el valor de la energía. Lo que sí va a cambiar es la ecuación polar para $r(\varphi)$ en (6). Para verlo habría que volver a hacer la integral (4) ayudándose de la integral de tablas (5).

Sin embargo, hay un atajo. Queríamos pasar de $r(t)$ a $r(\varphi)$ usando que $\ell dt = \mu r^2 d\varphi$. La clave está en notar que redefinir el momento angular también implica redefinir el ángulo

$$\alpha \ell dt = \mu r^2 \alpha d\varphi \quad \rightarrow \quad \bar{\ell} dt = \mu r^2 d\bar{\varphi}, \quad \text{con } \bar{\varphi} = \alpha\varphi \quad (12)$$

O dicho de otra forma, podemos multiplicar ambos lados de (4) por α

$$\alpha(\varphi - \varphi_0) = \int_{r_0}^r \frac{\alpha \ell}{\sqrt{2\mu r^4 [E - V_{ef}(r)]}} dr \quad (13)$$

De esta manera la integral a hacer es idéntica a la de Kepler. La solución será la misma pero modificando $\ell \rightarrow \alpha\ell$ y $\varphi \rightarrow \alpha\varphi$. Si $E < 0$

$$r(\varphi) = \frac{B^2/A}{1 + e \cos(\alpha\varphi)}, \quad B = \frac{\alpha \ell}{\sqrt{2\mu|E|}}, \quad A = \frac{k}{2|E|} \quad (14)$$

Ya vimos que si $\alpha = 1$ la órbita descrita por esta ecuación corresponde a una elipse con origen en el foco como en la figura 3. Un ciclo en (r, φ) se completa cuando el planeta pega una vuelta a la elipse: por ejemplo cuando va de $(r_{per}, 0) \rightarrow (r_{af}, \pi) \rightarrow (r_{per}, 2\pi)$. Pasó por un radio mínimo r_{per} y uno máximo r_{af} . El ángulo que le llevó completar un ciclo fue 2π . La órbita es cerrada porque después de una vuelta ($\varphi = 2\pi$) vuelve al lugar donde empezó, ya que $\cos(0) = \cos(2\pi)$ en la ecuación polar.

c) ¿Qué cambia α ? Como $\cos(\varphi) \rightarrow \cos(\alpha\varphi)$, el recorrido anterior se modifica a $(r_{per}, 0) \rightarrow (r_{af}, \pi/\alpha) \rightarrow (r_{per}, 2\pi/\alpha)$. Este recorrido está dibujado para $\alpha = 4/3$ en la figura 4 izquierda,

que se llama gráfico polar (es la trayectoria en el plano x, y). Recuerden que el origen es un foco de la elipse.

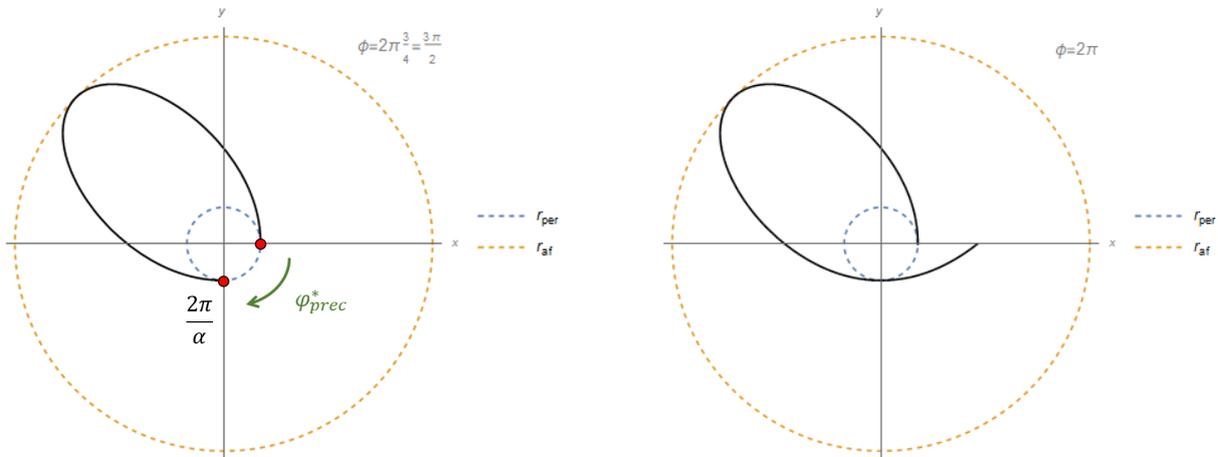


Figura 4: La trayectoria está en negro. Los datos son $\alpha = 4/3$, $A = 0,2$ y $e = 0,7$.
 Izquierda: $\varphi = 2\pi/\alpha$, completó un ciclo pero no volvió adonde empezó.
 Derecha: $\varphi = 2\pi$, hizo un giro completo.

Si definimos un ciclo como darle la vuelta a la elipse, entonces ahora el ángulo que le llevó completarlo es $\Delta\varphi = 2\pi/\alpha$. Podemos notar que ahora cuando el planeta completa un ciclo no vuelve adonde empezó, porque está en un ángulo $2\pi/\alpha < 2\pi$. No llegó a hacer un giro completo de ángulo 2π ; el punto de regreso se “corrió” de lugar un ángulo $\varphi_{prec}^* = \Delta\varphi - 2\pi$. A este movimiento se le llama *precesión*. Como empezó en r_{per} , lo que está precesando es el *perihelio*, que es el radio más cercano de la órbita.

ÓRBITAS CERRADAS: la condición de volver adonde empecé es que se complete un ciclo en un múltiplo racional de 2π

La órbita es cerrada si $\Delta\varphi = 2\pi\frac{m}{k} \Leftrightarrow \alpha = \frac{k}{m}, \quad k, m \in \mathbb{N}$

$k = \text{Número de Ciclos}, \quad m = \text{Número de giros}$

Para $\alpha = 4/3$, el planeta vuelve adonde empezó luego de $k = 4$ ciclos y $m = 3$ giros completos del ángulo, como se ve en la figura 5. Si α no es racional la órbita no será cerrada.

Es probable que no vean bien de estos dibujos que la trayectoria es una elipse que precede. Para convencerse miren el gif que está subido junto con este PDF.

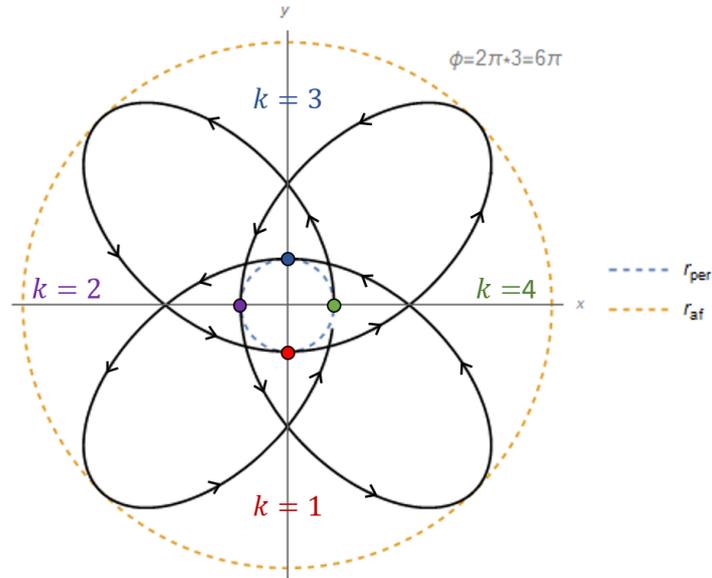
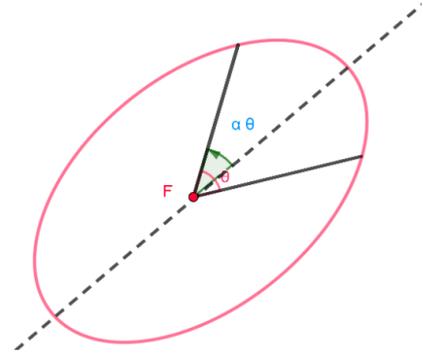


Figura 5: Trayectoria a punto de cerrarse en $\varphi = 6\pi$, para $k = 4$ y $m = 3$.

Para terminar, calculemos la velocidad de precesión. Desde un sistema fijo al espacio, el ángulo es φ . Pero desde un sistema que rota con la elipse, el ángulo (medido desde el semieje) es $\alpha\varphi$ [según (14)].



El ángulo de precesión (para todo tiempo) será entonces la diferencia entre ellos

$$\varphi_{prec}(t) = \varphi(t) - \alpha\varphi(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi}_{prec}(t) = (1 - \alpha)\dot{\varphi}(t) \quad (15)$$

Vemos que cumple lo visto anteriormente; en un período el ángulo de precesión es

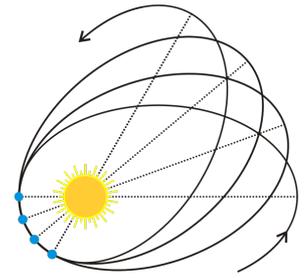
$$\varphi_{prec}^* \equiv \varphi_{prec}(\tau) = (1 - \alpha)\varphi(\tau) = (1 - \alpha)\frac{2\pi}{\alpha} = \Delta\varphi - 2\pi \quad (16)$$

Para obtener la velocidad de precesión $\dot{\varphi}_{prec}(t)$ necesitaríamos conocer primero $\dot{\varphi}(t)$. Si $\alpha \sim 1$, entonces $\dot{\varphi}_{prec}(t)$ será pequeño y podemos obtener un estimado si reemplazamos $\dot{\varphi}(t)$ por su valor promedio

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &\sim \dot{\varphi}_{prom} = \frac{\varphi_f - \varphi_i}{t_f - t_i} = \frac{2\pi/\alpha}{\tau} \\ \dot{\varphi}_{prec} &\sim (1 - \alpha)\frac{2\pi/\alpha}{\tau} = \frac{2\pi}{\tau} \frac{1 - \alpha}{\alpha} \end{aligned} \quad (17)$$

HISTORIA:

En el sistema solar, los planetas orbitan en elipses (aprox) alrededor del Sol. Como el Sol es muy masivo está muy cerca del centro de masa, así que podemos tomar al Sol en el foco. Era sabido que estas elipses precesan (ver gif). Según la Ley de Newton los planetas no precesarían si solo estuviese el Sol, pero existen otros efectos Newtonianos que introducen cierta precesión, como por ejemplo la presencia de otros planetas.



La Ley de Newton fue aplicada con éxito en muchas predicciones. Por ejemplo en 1759 Clairault calculó y predijo la fecha del retorno del cometa Halley. También por el astrónomo francés Urbain Le Verrier. En 1781 William Hanover descubrió un nuevo planeta usando su telescopio: Urano. Como predecía la teoría de Newton, Urano hacía una órbita elíptica. Sin embargo, esta órbita era más lenta que la predicha teóricamente. Para arregarlo, Le Verrier (y John Couch Adams en paralelo) hipotetizó que debía existir otro objeto de masa desconocida ubicado en una órbita exterior a la de Urano, para no afectar la (correcta) órbita de Saturno. Calculó su masa y predijo la locación del nuevo planeta; casi inmediatamente el Observatorio de Berlín encontró allí a Neptuno en 1845.

Este problema de Kepler modificado es interesante porque en 1859 Le Verrier notó, re-analizando observaciones previas del tránsito de Mercurio sobre el disco solar desde 1697 a 1848, que la precesión del perihelio de Mercurio (de 574" por siglo) tiene una anomalía (de 43") que no podía explicar mediante el potencial gravitatorio de Kepler ni por otros efectos Newtonianos como la presencia de otros planetas. Le Verrier, naturalmente, intentó entonces aplicar la misma técnica que le llevó al descubrimiento de Neptuno; empezó a buscar por un cuerpo faltante en el sistema solar. Este debía estar más cerca del Sol que Mercurio, para que no afecte la (correcta) órbita de la Tierra. En 1860 visitó un médico Francés que también hacía astronomía y decía haber grabado observaciones del tránsito de un planeta intermercurial; Le Verrier lo bautizó *Vulcano*. Pero el resto de la comunidad astronómica no lo pudo encontrar. Hasta su muerte en 1877, Le Verrier permaneció convencido que esta masa faltante existía y sería eventualmente descubierta, verificando la supremacía de la Ley Gravitatoria de Newton.

Para 1895 casi nadie creía que un cuerpo intermercurial existiera. Simon Newcomb rehizo las cuentas (le dio una anomalía aún mayor) y empezó a pensar que tal vez el problema estaba en la Ley Gravitatoria de Newton. Si, por ejemplo, el exponente del denominador fuese 2.00000016, entonces el movimiento de Mercurio podría ser explicado con más precisión... parecería que hace falta algún tipo de corrección en la fuerza para obtener la precesión deseada.

Einsten logró predecir valor de la anomalía en el marco de la Relatividad General, dándole un impulso enorme a la teoría. La fuerza (10) de este ejercicio corresponde al primer orden en una expansión de Taylor alrededor de la constante gravitatoria G de la Relatividad General. La anomalía es más notable en Mercurio porque al estar más cerca del sol los efectos gravitatorios son más fuertes, y porque su excentricidad es grande.

