

Guía 4 - Pequeñas Oscilaciones

REPASO TEÓRICO

Una vez planteado el Lagrangiano buscamos las posiciones de equilibrio como los mínimos del potencial

$$\mathcal{L} = T(q, \dot{q}) - V(q) = \sum_{i,j=1}^n \frac{f_{ij}(q)}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q), \quad \left. \frac{\partial V(q)}{\partial q_k} \right|_{q^{(eq)}} = 0 \quad (1)$$

Luego estudiamos el problema de pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio, $\eta_i = q_i - q_i^{(eq)}$, aproximando el Lagrangiano a segundo orden en $\eta_i \ll 1$

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2} \sum_{i,j} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j - V_{eq} \equiv \frac{1}{2} \dot{\eta}^t \mathbb{T} \dot{\eta} - \frac{1}{2} \eta^t \mathbb{V} \eta - V_{eq} \quad (2)$$

donde pasamos a notación matricial para simplificar el álgebra. Como V_{eq} es una constante que no modifica la dinámica, la ignoraremos. Los coeficientes de las matrices vienen dados por

$$T_{ij} = f_{ij}(q^{(eq)}), \quad V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q^{(eq)}}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

Las ecuaciones de E-L nos dicen que

$$\sum_j T_{ij} \ddot{\eta}_j + V_{ij} \eta_j = (\mathbb{T} \ddot{\eta} + \mathbb{V} \eta)_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{T} \ddot{\eta} + \mathbb{V} \eta = 0 \quad (4)$$

Proponemos como solución un oscilador armónico

$$\eta_j = a_j e^{i\omega t} \quad \longrightarrow \quad \eta = \mathbb{A} e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \det(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) = 0 & \rightarrow \text{Autovalores } \omega_k \\ (\mathbb{V} - \omega_k^2 \mathbb{T}) \mathbb{A}^{(k)} = 0 & \rightarrow \text{Autovectores } \mathbb{A}^{(k)} \end{cases} \quad (5)$$

De aquí salen n valores para ω . Cada uno corresponde a un modo normal, que identificamos con el subíndice k . La matriz cuadrada \mathbb{A} tiene los autovectores $\mathbb{A}^{(k)}$ en sus columnas, es decir $\mathbb{A} = (\mathbb{A}^{(1)} \mathbb{A}^{(2)} \dots \mathbb{A}^{(n)})$. Finalmente, la solución general será una combinación de modos normales

$$\eta_j = \sum_k C_k a_j^{(k)} e^{i\omega_k t} \quad \longrightarrow \quad \eta(t) = \text{Re} \left[\sum_k C_k \mathbb{A}^{(k)} e^{i\omega_k t} \right] = \sum_k C_k \mathbb{A}^{(k)} \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (6)$$

donde $C_k = C_k e^{i\phi_k}$ es un número complejo que contiene la información de la amplitud C_k y fase

ϕ_k de cada modo normal. En general para imponer las condiciones iniciales suele ser más fácil usar la siguiente expresión

$$\eta(t) = \sum_k \mathbb{A}^{(k)} [B_k \cos(\omega_k t) + D_k \sin(\omega_k t)] \quad (7)$$

Coordenadas Normales: Como los autovectores son ortogonales a través de la métrica, entonces \mathbb{A} diagonaliza a \mathbb{T} y \mathbb{V} : $\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \text{diag}(t_1, \dots, t_n)$ y $\mathbb{A}^T \mathbb{V} \mathbb{A} = \text{diag}(V_1, \dots, V_n)$. Esto nos permite elegir *coordenadas normales* $\eta = \mathbb{A} \xi$ que diagonalizan a \mathbb{T} y \mathbb{V} , reduciendo el problema un montón

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \dot{\xi}^T (\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A}) \dot{\xi} - \frac{1}{2} \xi^T (\mathbb{A}^T \mathbb{V} \mathbb{A}) \xi = \sum_k \frac{t_k}{2} \dot{\xi}_k^2 - \frac{V_k}{2} \xi_k^2 \\ \Rightarrow \xi_k &= G_k e^{i\omega_k t} = \frac{C_k}{t_k} e^{i\omega_k t}, \quad \text{con } \omega_k^2 = \frac{V_k}{t_k} \end{aligned} \quad (8)$$

Es decir que $\xi \propto \mathbb{A}^T \mathbb{T} \eta$, es proporcional a menos de una constante multiplicativa ($1/t_k$).

En particular podríamos elegir los coeficientes de \mathbb{A} de forma de normalizar la diagonalización de \mathbb{T} , $\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{1}$ (ortonormalidad). En ese caso $t_k = 1$ y $\omega_k^2 = V_k$ y las llamamos *coordenadas normales normalizadas*.

Pequeñas Oscilaciones: Pasos

1. Escribir $\mathcal{L}(q, \dot{q})$

2. Encontrar las posiciones de equilibrio: $\left. \frac{\partial V(q)}{\partial q_k} \right|_{q=q^{(eq)}} = 0$

3. Reescribir \mathcal{L} a orden 2 en función de nuevas variables $\eta = q - q^{(eq)}$ tal que

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2} \sum_{i,j} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j), \quad \text{con } T_{ij} = f_{ij}(q)|_{q^{(eq)}} \text{ y } V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q^{(eq)}}$$

4. Hallar las matrices \mathbb{T} y \mathbb{V} según: $(\mathbb{T})_{ij} = T_{ij} = f_{ij}(q)|_{q^{(eq)}}$ y $(\mathbb{V})_{ij} = V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q^{(eq)}}$

5. Hallar los autovalores a partir de: $\det(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{M}) = 0$

6. Hallar los autovectores que cumplan: $(\mathbb{V} - \omega_k^2 \mathbb{T}) \mathbb{A}^{(k)} = \mathbb{0}$ $(\mathbb{A}^{(k)})^T \mathbb{T} \mathbb{A}^{(k)} = \mathbb{1}$

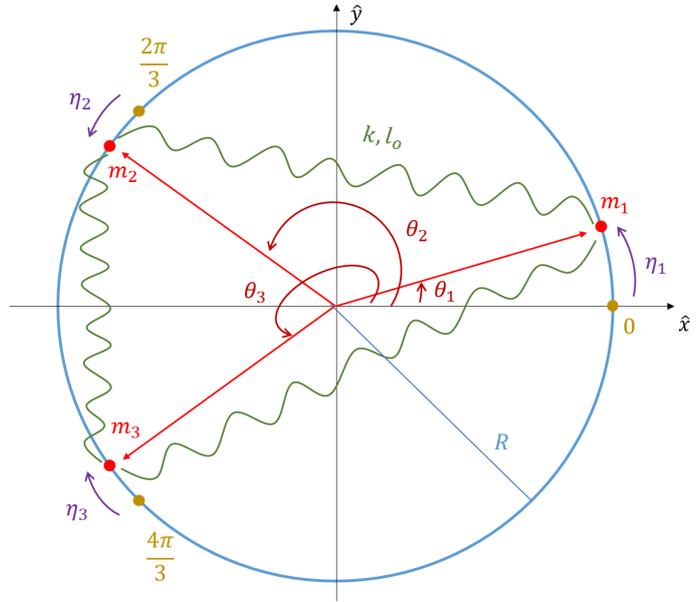
7. Solución gral: $\eta(t) = \sum_k \mathbb{A}^{(k)} C_k \cos(\omega_k t + \phi_k) = \sum_k \mathbb{A}^{(k)} [B_k \cos(\omega_k t) + D_k \sin(\omega_k t)]$. Despejar B_k y D_k en función de las condiciones iniciales (pueden ayudarse imponiendo la condición de ortonormalidad $\mathbb{A}^T \mathbb{T} \mathbb{A} = \mathbb{1}$ si quieren)

8. Se pueden obtener las coordenadas normales: $\xi = \mathbb{A}^T \mathbb{T} \eta \rightarrow \xi_k = G_k e^{i\omega_k t}$

EJERCICIO 7

Hay tres masas enhebradas en un anillo de radio R unidas por resortes.

Como hay radios fijos y ángulos, conviene usar coordenadas polares $\vec{r}_i = R \hat{r}_i$



☉ **Paso 1 (Escribir \mathcal{L}).** La cinética es muy simple, porque los radios son fijos

$$T(q) = \sum_i \frac{m_i}{2} R^2 \dot{\theta}_i^2 \quad (9)$$

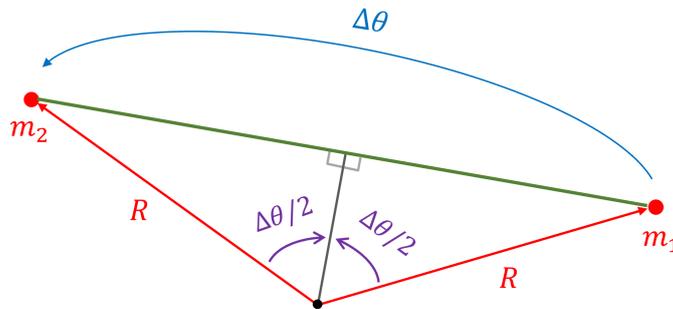
El complicado es el potencial, porque depende de la distancia entre las masas

$$V = \frac{k}{2} \{ (|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - \ell_0)^2 + (|\vec{r}_3 - \vec{r}_1| - \ell_0)^2 + (|\vec{r}_3 - \vec{r}_2| - \ell_0)^2 \} = \sum_{j>i} \frac{k}{2} (|\vec{r}_j - \vec{r}_i| - \ell_0)^2 \quad (10)$$

donde el módulo de la distancia es complicado porque el movimiento es bidimensional, como pasa en el ejercicio 3. Podrían usar cartesianas. Manteniendo polares tenemos

$$\sqrt{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)^2} = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \hat{r}_j \cdot \hat{r}_i} = 2R \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta_j - \theta_i)}{2}} = 2R \sqrt{\sin^2 \left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2} \right)} \quad (11)$$

Y nos queda el módulo del seno en el potencial. En clase vimos una forma más geométrica, aprovechando que entre la longitud del resorte y las posiciones de las masas siempre se forman triángulos isósceles como en la siguiente figura.



Se ve que el tramo verde estará dado por $2R|\sin(\Delta\theta_{ji}/2)|$. Que modulo molesto... ¿será necesario? Para que las masas no se choquen se debe cumplir que $\theta_3 > \theta_2 > \theta_1$. En cada caso tenemos (notar que para 3-1 necesitamos el complemento)

$$\begin{aligned} \bullet \Delta\theta_{21}/2 &= (\theta_2 - \theta_1)/2 > 0 & , & & \bullet \Delta\theta_{32}/2 &= (\theta_3 - \theta_2)/2 > 0 \\ \bullet \Delta\theta_{31}/2 &= [2\pi - (\theta_3 - \theta_1)]/2 > 0 & \Rightarrow & \sin\left(\frac{\Delta\theta_{31}}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_1}{2}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

Así que los argumentos son positivos. El seno entonces será positivo si el argumento es menor a π , osea $\theta_j - \theta_i \leq 2\pi$. Pero esto también se debe cumplir para que no se choquen. Por ejemplo si $\theta_1 = 0$, el ángulo máximo que pueden tener θ_2 y θ_3 es 2π para no chocar con m_1 . Concluimos que no hacen falta los módulos.

Ya tenemos el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{m_i}{2} R^2 \dot{\theta}_i^2 + \frac{k}{2} \left\{ \left[2R \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - \ell_0 \right]^2 + \left[2R \sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_1}{2}\right) - \ell_0 \right]^2 + \left[2R \sin\left(\frac{\theta_3 - \theta_2}{2}\right) - \ell_0 \right]^2 \right\} \quad (13)$$

🕒 **Paso 2 (Hallar θ^{eq}).** Hallamos los puntos de equilibrio para cada variable según

$$\text{Hay equilibrio si } \left. \frac{\partial V}{\partial \theta_i} \right|_{\theta^{eq}} = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Sin embargo si hacemos eso lo que queda no es simple, hay una suma para cada variable. Por ejemplo respecto de $i = 1$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \right|_{\theta^{eq}} &= k \left[2R \sin\left(\frac{\theta_2^{eq} - \theta_1^{eq}}{2}\right) - \ell_0 \right] 2R \cos\left(\frac{\theta_2^{eq} - \theta_1^{eq}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &+ k \left[2R \sin\left(\frac{\theta_3^{eq} - \theta_1^{eq}}{2}\right) - \ell_0 \right] 2R \cos\left(\frac{\theta_3^{eq} - \theta_1^{eq}}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Pinta que vamos a tardar infinito. Mejor probemos con un atajo: sugerir una solución y ver si cumple! En el problema hay mucha simetría porque todas las longitudes naturales y constantes de resortes son iguales. Es sensato pensar que, como queremos poner 3 partículas en un aro de 2π , los θ^{eq} están separados por $2\pi/3$. Entonces proponemos $\theta_3^{eq} = 2\pi/3 + \theta_2^{eq} = 4\pi/3 + \theta_1^{eq}$. Pueden chequear que esto funciona y minimiza el potencial (anula la derivada para cada i).

Por ejemplo si $i = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta^{eq}} = & k \left[\overbrace{2R \sin\left(\frac{2\pi/3}{2}\right) - \ell_0}^{=\sqrt{3}/2} \right] \overbrace{2R \cos\left(\frac{2\pi/3}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)}^{=1/2} \\ & + k \left[\overbrace{2R \sin\left(\frac{4\pi/3}{2}\right) - \ell_0}^{=\sqrt{3}/2} \right] \overbrace{2R \cos\left(\frac{4\pi/3}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)}^{=-1/2} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Vemos que hay cierta libertad respecto de las posiciones de equilibrio porque el potencial sólo depende de las diferencias entre los ángulos. Podemos por ejemplo elegir la convención $\theta_1^{eq} = 0$. Finalmente las posiciones de equilibrio son

Equilibrio: $\theta_1^{eq} = 0, \quad \theta_2^{eq} = \frac{2\pi}{3}, \quad \theta_3^{eq} = \frac{4\pi}{3}$ (17)

🕒 **Paso 3 (Aproximar \mathcal{L}).** Para las variables η conviene tomar los arcos

$$\eta_1 = R\theta_1, \quad \eta_2 = R\left(\theta_2 - \frac{2\pi}{3}\right), \quad \eta_3 = R\left(\theta_3 - \frac{4\pi}{3}\right) \quad (18)$$

Queremos aproximar el Lagrangiano. La cinética es simple porque ya está a orden 2: \mathbb{T} es diagonal en las masas. Para \mathbb{V} hay que derivar dos veces el potencial y evaluar en el equilibrio.

Otra opción es ir expandiendo manualmente hasta llegar a un Lagrangiano de orden 2. Ojo acá con acostumbrarse a que el seno se expande solo como el argumento... eso vale solo si se expande alrededor de $\theta^{(eq)} = 0$. Pero en general depende del valor de $\theta^{(eq)}$. Otro detalle poco obvio es que en el potencial tenemos el seno adentro de una cuadrática, entonces hay que expandirlo a **orden 2**, no orden 1 como uno creería inocentemente. Veamoslo. Si expandimos

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \simeq & \sin\left(\frac{\theta_2^{(eq)} - \theta_1^{(eq)}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta_2^{(eq)} - \theta_1^{(eq)}}{2}\right) \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{R}\right) \\ & - \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\theta_2^{(eq)} - \theta_1^{(eq)}}{2}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{R}\right)^2 \end{aligned} \quad (19)$$

y para simplificar la notación definimos

$$\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \simeq \alpha_{21} + \beta_{21} \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{R}\right) - \frac{\alpha_{21}}{8} \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{R}\right)^2 \quad (20)$$

y $\ell = \ell_0/(2R)$ entonces el potencial se aproxima como

$$V_{21} = \frac{k}{2} 4R^2 \left[\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - \ell \right]^2 \simeq \frac{k}{2} 4R^2 \left\{ (\alpha_{21} - \ell)^2 + 2(\alpha_{21} - \ell)\beta_{21} \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{R}\right) + \left[\beta_{21}^2 - 2(\alpha_{21} - \ell)\frac{\alpha_{21}}{8} \right] \left(\frac{\eta_2 - \eta_1}{R}\right)^2 \right\} \quad (21)$$

Hay que sumar los tres potenciales. El primer término, de equilibrio (orden 0 en η), es una constante del Lagrangiano que no aporta a la dinámica: lo ignoro. El segundo término es lineal en η . Por definición, los $\theta^{(eq)}$ eran tal que se anulaba la derivada primera del potencial. Así que al sumar los tres potenciales, el término lineal se **tiene** que ir: chequeénlo. Finalmente, usando las igualdades trigonométricas

$$\bullet \alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{31} = \sqrt{3}/2 \quad (22)$$

$$\bullet \beta_{21} = \beta_{32} = -\beta_{31} = 1/4 \quad (23)$$

la suma de los términos cuadráticos resulta en

$$V(\eta) \simeq \frac{\gamma}{2} [(\eta_2 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2], \quad \gamma = \frac{k}{2} \left(\frac{\sqrt{3}\ell_0}{2R} - 1 \right) \quad (24)$$

la cual es una expresión estéticamente agradable. La dejo para que puedan chequear la expresión con otros potenciales de resortes en aros (como el del ejercicio 9). Pero la verdad que hacer esto no es simple en este ejercicio. Creo que es igual de trabajoso: en ambos casos hay que calcular las derivadas del potencial a segundo orden.

Nuestro Lagrangiano aproximado a orden 2 será entonces

$$\mathcal{L}(\eta, \dot{\eta}) \simeq \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\eta}_i^2 + \frac{\gamma}{2} [(\eta_2 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2] \quad (25)$$

🕒 **Paso 4 (Definir \mathbb{T} y \mathbb{V}).** A partir de $\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2} \sum T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum V_{ij} \eta_i \eta_j$ tenemos

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{V} = \gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Siempre chequeen a esta altura que las matrices obtenidas sean *simétricas*.

Observación: Como vemos de (24), γ es como una constante elástica efectiva del resorte para pequeñas oscilaciones. Pero para que se asemeje a un resorte, γ debe ser positiva. En ese caso el equilibrio corresponde a un mínimo y es estable. Pero si $\gamma < 0$ el equilibrio es un máximo y resulta inestable. Los apartamientos no serán pequeños sino exponenciales: crecerán hasta que las masas choquen. Vamos a asumir que $\gamma > 0$ en lo que sigue.

🕒 Paso 5 y 6 (Calcular autovalores y autovectores).

Antes de hallar ω_k y $\mathbb{A}^{(k)}$, es importante desarrollar cierta intuición física sobre lo que deberíamos esperar. ¿Qué modos esperan que aparezcan?

Debería aparecer un modo rígido asociado a la rotación: si todos los ángulos se modifican en la misma cantidad, el problema es el mismo. Los modos restantes corresponderán a algún tipo de movimiento mixto de fase o contrafase.

Tomemos $m_1 = m_2 \equiv m$ y $m_3 \equiv M$ para simplificar un poco. La ecuación (5) nos indica que las frecuencias son los autovalores de la matriz

$$\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T} = \begin{pmatrix} 2\gamma - \omega^2 m & -\gamma & -\gamma \\ -\gamma & 2\gamma - \omega^2 m & -\gamma \\ -\gamma & -\gamma & 2\gamma - \omega^2 M \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det(\mathbb{V} - \omega^2 \mathbb{T}) \quad (27)$$

Definamos $\lambda = 2\gamma - \omega^2 m$. Queremos $\Delta = 0$. Recordemos algunos trucos para simplificar la cuenta: el valor del determinante no cambia si a una fila se le suma otra, y si a una fila se la multiplica por una constante el determinante se multiplica por la misma constante. El objetivo es llevar la matriz a una forma más triangular o con la mayor cantidad de ceros posibles. Así, si a la tercer fila le restamos la segunda tenemos

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda & -\gamma & -\gamma \\ -\gamma & \lambda & -\gamma \\ 0 & -\gamma - \lambda & 3\gamma - \omega^2 M \end{pmatrix} \quad (28)$$

Si multiplicamos por λ/γ la segunda y le sumamos la primera nos queda un det de 2x2

$$\frac{\lambda}{\gamma} \Delta = \det \begin{pmatrix} \lambda & -\gamma & -\gamma \\ 0 & \frac{\lambda^2}{\gamma} - \gamma & -\lambda - \gamma \\ 0 & -\gamma - \lambda & 3\gamma - \omega^2 M \end{pmatrix} = \lambda \left[\left(\frac{\lambda^2}{\gamma} - \gamma \right) (3\gamma - \omega^2 M) - (\lambda + \gamma)^2 \right] \quad (29)$$

Las cuentas no se ponen más divertidas. Les dejo a ustedes chequear que los autov son

$$\begin{array}{c|c|c} \omega_1^2 = 0 & \omega_2^2 = \frac{3\gamma}{m} & \omega_3^2 = \frac{(2m + M)\gamma}{mM} \\ \mathbb{A}^{(1)} = a^{(1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbb{A}^{(2)} = a^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbb{A}^{(3)} = a^{(3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2m}{M} \end{pmatrix} \end{array} \quad (30)$$

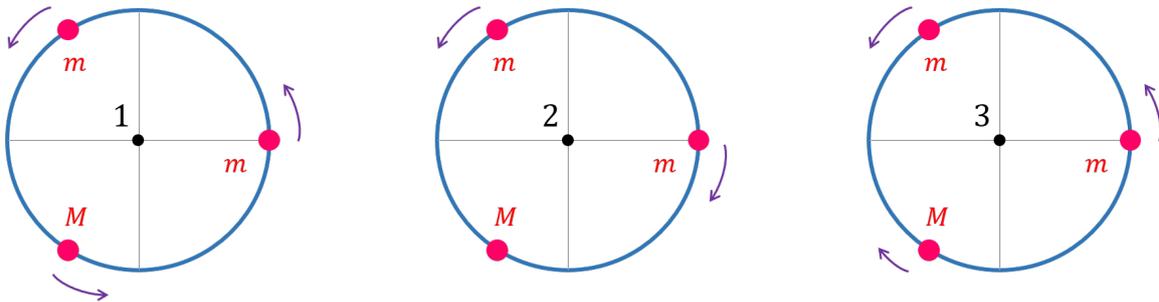
Pueden verificar sus resultados rápidamente con una línea de código (de Mathematica)

```

In[1]:= T =  $\begin{pmatrix} m1 & 0 & 0 \\ 0 & m1 & 0 \\ 0 & 0 & m3 \end{pmatrix}$ ; v =  $\gamma \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ; eta =  $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ ;
      {vals, vecs} = Eigensystem[{V, T}]
Out[2]:=  $\left\{ \left\{ 0, \frac{3\gamma}{m1}, \frac{(2m1+m3)\gamma}{m1m3} \right\}, \left\{ \{1, 1, 1\}, \{-1, 1, 0\}, \left\{ -\frac{m3}{2m1}, -\frac{m3}{2m1}, 1 \right\} \right\} \right\}$ 

```

Aquí hay que ponerse a reflexionar si lo obtenido coincide con lo esperado. Vemos que en el modo 1 apareció la frecuencia nula asociada a la simetría de rotación rígida del problema. El modo 2 es simétrico, de contrafase entre m_1 y m_2 con m_3 fijo. El modo 3 es antisimétrico, m_3 en contrafase de m_1 y m_2 . Los autovectores son iguales a los de la molécula del ejercicio 1.



⊙ **Paso 7 (Solución general).** La frecuencia 1 se anula... ¿eso significa que $\eta_1 \sim e^{i\omega_1 t}$ es una constante? No, significa que esa solución propuesta no era correcta, porque no hay oscilación. El movimiento es en realidad una rotación rígida con velocidad angular constante, $\eta_1 = \eta_0 + V_0 t$. Si ponemos $a^{(k)} = 1$ (no normalizamos) entonces

$$\eta(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (\eta_0 + V_0 t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} D_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2m} \\ -\frac{1}{M} \end{pmatrix} D_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \quad (31)$$

⊙ **Paso 8 (Coordenadas Normales).**

$$\xi = A^T T \eta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{2m}{M} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(\eta_1 + \eta_2) + M\eta_3 \\ m(\eta_1 - \eta_2) \\ m(\eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3) \end{pmatrix} \quad (32)$$

Cada coordenada normal se corresponde con un único modo normal

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2m + M)(\eta_0 + V_0 t) \\ 2m D_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ \frac{2m}{M}(2m + M) D_3 \cos(\omega_3 t + \phi_3) \end{pmatrix} \quad (33)$$

EXTRA: ¿Qué sucede si $m_1 = m_2 = m_3$?

Fijense de (30) que en ese caso $\omega_2 = \omega_3 = 3\gamma/m$. Es decir que el subespacio está degenerado: dos autovectores distintos corresponden al mismo autovalor. Si me dicen que el sistema tiene esa frecuencia, no podría distinguir en que modo está. En particular noten que para el tercer autovector puedo elegir una combinación lineal

$$\bar{\mathbb{A}}^{(3)} = \frac{1}{2}\mathbb{A}^{(2)} + \frac{1}{2}\mathbb{A}^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (34)$$

Es decir, debido a la simetría del problema cualquiera de las masas podría ser la que esté quieta mientras las otras dos oscilan en contrafase. Como las masas son iguales no puedo distinguir a priori cual está quieta; todas las opciones tienen la misma frecuencia y energía.