

Guía 5 - Cuerpo Rígido

GRADOS DE LIBERTAD

Llamamos cuerpo rígido (CR) a toda colección de partículas que mantiene invariante sus distancias relativas: $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = cte \forall i \neq j$. Esas ecuaciones imponen vínculos sobre el sistema. Se puede ver que el número de grados de libertad resultante es 6. Podemos descomponerlos en: **3 de traslación** (fijos al espacio) + **3 de rotación** (fijos al cuerpo).

CINÉTICA DEL CR

Cinética del CR

Si el origen O del sistema de referencia solidario al cuerpo es el CM o un punto fijo

$$T = T_{Trasl} + T_{Rot} = \frac{M}{2} \vec{v}_O^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}^t \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\Omega}, \quad \vec{L}_O = \mathbf{I} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\mathbf{I}_{ij} = \int \rho(\vec{r}) [\vec{r}^2 \delta_{jk} - r_j r_k] dV \quad (1)$$

donde \vec{r} (y por tanto \mathbf{I}) son medidos desde O.

TENSOR DE INERCIA

En la energía cinética de rotación y en el momento angular (1) apareció el tensor de inercia \mathbf{I} , una matriz real y simétrica de 3x3. En general esta matriz posee elementos no diagonales, pero si elegimos los ejes de forma astuta podemos diagonalizar la matriz. Esto viene de un teorema matemático que dice que si \mathbf{I} es una matriz real simétrica, entonces se puede diagonalizar según

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}^{(d)} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \det(\mathbf{I} - I\mathbf{1}) = 0 \\ \mathbf{I} \cdot \vec{R}_i = I_i \vec{R}_i \end{cases}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \vec{R}_1^T \\ \vec{R}_2^T \\ \vec{R}_3^T \end{pmatrix} \quad (2)$$

Los autovalores I_i son los denominados *momentos principales de inercia*. Los autovectores *normalizados* \vec{R}_i forman una base en \mathbb{R}^3 ; son los *ejes principales de inercia*. Al acomodarlos en las *filas* de una matriz \mathbf{R} , como la base es ortonormal, resulta que la matriz es ortogonal: $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$. En uno de los apéndices hablo un poco de ellas, pero resulta que las matrices ortogonales son transformaciones de reflexión o rotación (nos enfocaremos en las últimas). Esto es porque mantienen invariante la norma del vector posición (ver apéndice). Es decir que si rotamos los ejes entonces $\vec{\Omega}' = \mathbf{R} \cdot \vec{\Omega} \Rightarrow \vec{\Omega} = \mathbf{R}^T \vec{\Omega}'$ y la energía cinética de rotación se

diagonaliza

$$\begin{aligned}
 T_{Rot} &= \frac{1}{2} \vec{\Omega}^T \cdot \mathbf{I} \cdot \vec{\Omega} = \frac{1}{2} \vec{\Omega}'^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \vec{\Omega}' = \frac{1}{2} \vec{\Omega}'^T \cdot \mathbf{I}^{(d)} \cdot \vec{\Omega}' \\
 &= \frac{1}{2} I_1 \Omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \Omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \Omega_3^2
 \end{aligned} \tag{3}$$

Vemos que la matriz de inercia transforma en cierta manera particular frente a transformaciones ortogonales (por eso se la llama *tensor de rango 2*, ver apéndice). Por ejemplo si transformáramos mediante una transformación general ortogonal \mathbf{O} el momento angular $\vec{L} = \mathbf{I} \cdot \vec{\Omega}$

$$\begin{aligned}
 \vec{L}' &= \mathbf{O} \cdot \vec{L} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{I} \cdot \overbrace{(\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O})}^{=1} \cdot \vec{\Omega} = (\mathbf{O} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{O}^T) \cdot (\mathbf{O} \cdot \vec{\Omega}) = \mathbf{I}' \cdot \vec{\Omega}' \\
 &\Rightarrow \mathbf{I}' = \mathbf{O} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{O}^T
 \end{aligned} \tag{4}$$

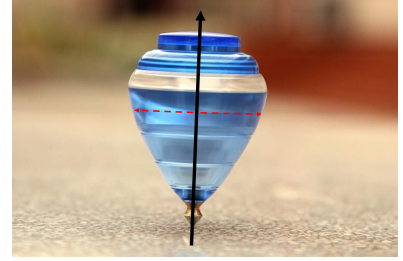
Teorema de Steiner

Los tensores de inercia calculados desde un punto O y desde el CM se relacionan según

$$I_{jk}^{(O)} = I_{jk}^{(CM)} + M [\vec{a}^2 \delta_{jk} - a_j a_k] , \quad \vec{a} = \vec{r}_O - \vec{r}_{CM} \tag{5}$$

Problema 1

n) Mostrar que si un cuerpo tiene un eje de simetría, entonces el centro de masa está contenido en dicho eje y además es un eje principal de inercia.



Que un cuerpo tenga un eje de simetría significa que la densidad de masa del CR permanece invariante ante una rotación alrededor de ese eje. Si definimos dicho eje como \hat{z} y usamos coordenadas cilíndricas, este hecho se expresa matemáticamente como que la densidad no depende del ángulo

$$\rho(r, \varphi, z) = \rho(r, z) \quad (6)$$

Veamos dónde está ubicado el CM con esta densidad

$$\begin{aligned} M \vec{r}_{CM} &= \int \rho(\vec{r}) \vec{r} dV = \int \rho(r, z) (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz \\ &= \iint \rho(r, z) r \left[r \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi}_{=0} \hat{x} + r \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi}_{=0} \hat{y} + z \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \hat{z} \right] dr dz \\ &\Rightarrow \vec{r}_{CM} = z_{CM} \hat{z} \end{aligned} \quad (7)$$

Es decir que el CM está ubicado en el eje de simetría \hat{z} .

Nos falta mostrar que el eje de simetría es un eje principal de inercia. Matemáticamente, esto significa que el vector $\hat{z} = (0, 0, 1)^T$ debe ser un autovector [con autovalor I_3 , ver Eq. (2)]

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xz} \\ I_{yz} \\ I_{zz} \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Si } z \text{ es} \\ \text{eje ppal}}}{=} I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

donde ya usé explícitamente el hecho de que la matriz de inercia es simétrica. Es decir que el eje de simetría es un eje principal si los elementos fuera de la diagonal que involucran a z se

anulan: $I_{xz} = I_{yz} = 0$. Calculemoslos

$$I_{jk} = \int \rho(\vec{r}) [(x^2 + y^2 + z^2) \delta_{jk} - r_j r_k] dx dy dz$$

$$I_{xz} = - \int \rho(\vec{r}) xz dx dy dz = - \int \rho(r, z) r z \cos \varphi r dr d\varphi dz = 0$$

$$I_{yz} = - \int \rho(\vec{r}) yz dx dy dz = - \int \rho(r, z) r z \sin \varphi r dr d\varphi dz = 0$$

$$I_{xy} = - \int \rho(\vec{r}) xy dx dy dz = - \int \rho(r, z) r^2 \cos \varphi \sin \varphi r dr d\varphi dz = 0 \quad (9)$$

Como $I_{xz} = I_{yz} = 0$, probamos que z es un eje principal de inercia. Aún más, $I_{xy} = 0$ y $I_{xx} = I_{yy}$ (pruébenlo). Entonces la matriz de inercia es totalmente diagonal

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (10)$$

↑
Si z es eje de sim

Fijense que ni siquiera dijimos cómo estaban ubicados \hat{x} e \hat{y} . Debido a la simetría rotacional alrededor de \hat{z} , cualquier par de versores perpendiculares a \hat{z} es igual de bueno; podría intercambiar $x \leftrightarrow y$ y obtendría lo mismo, por eso $I_{xx} = I_{yy} \equiv I_1$. No podemos distinguirlos; decimos que sus momentos principales de inercia en $x - y$ están *degenerados*.

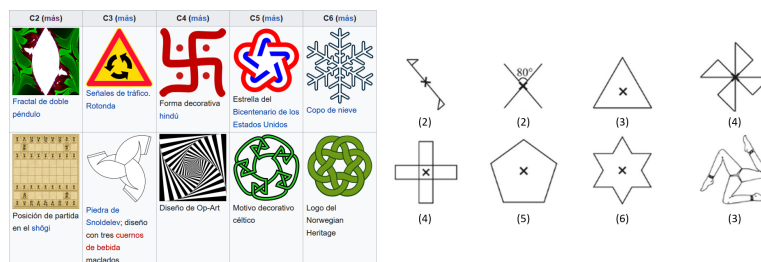
Otra forma más simple de demostrarlo sería mediante simetrías como vimos en clase. Como la densidad es invariante ante rotaciones, también deben serlo el CM y el tensor de inercia (es el mismo cuerpo)

$$\text{Si } \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_{CM}' = \mathbf{R}_z \cdot \vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM} \\ \mathbf{I}' = \mathbf{R}_z \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}_z^T = \mathbf{I} \end{cases} \quad (11)$$

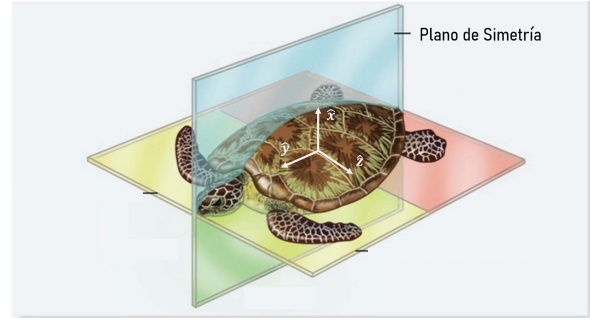
Prueben que llegan a las mismas conclusiones.

Con esta idea de simetrías también hacer el 1.q) y mostrar que si hay un eje de simetría con orden mayor a 2, hay degeneración ($I_1 = I_2$) en el plano perpendicular al eje ($\hat{3}$).

Orden m : Un cuerpo tiene simetría de orden m si es invariante frente a una rotación en un ángulo $\alpha = 2\pi/m$. En la figura vemos algunos ejemplos



m) Mostrar que si un cuerpo tiene un plano de simetría, entonces tanto el centro de masa como dos de los ejes principales de inercia están contenidos en dicho plano, y el tercer eje es perpendicular.



Que la tortuga tenga un plano de simetría $\hat{x} - \hat{y}$ en su masa significa que su densidad es invariante ante cambiar $z \rightarrow -z$

$$\rho(x, y, -z) = \rho(x, y, z) \quad (12)$$

Calculemos la posición z del CM aplicando esta transformación

$$\begin{aligned} z_{CM} &= \int_S \int_{-f(x,y)}^{f(x,y)} \rho(x, y, z) z dz dS \\ &= \int_S \left[\int_{-f(x,y)}^0 \rho(x, y, z) z dz + \int_0^{f(x,y)} \rho(x, y, z) z dz \right] dS \\ &\stackrel{\substack{\uparrow \\ z \rightarrow -z \text{ en el} \\ \text{primer término}}}{=} \int_S \left[\int_{f(x,y)}^0 \rho(x, y, z) (-z) (-dz) + \int_0^{f(x,y)} \rho(x, y, z) z dz \right] dS = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Por lo que el CM se encuentra en el plano de simetría. Haciendo el mismo procedimiento se puede ver que $I_{xz} = I_{yz} = 0$, por lo que \hat{z} es un eje principal.

Hay otra forma más rápida pero abstracta de demostrarlo, usando simetrías. La ecuación (6) implica que la densidad es invariante ante una reflexión en el plano $x - y$, la cual se escribe como

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Esta es una matriz ortogonal ($\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$ y mantiene la norma invariante), aunque con $\det(R) = -1$. Como la masa distribución de masa es la misma frente a esa transformación, el tensor de inercia también debe serlo. Es decir, pedimos que $\mathbf{I}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{I}' &= \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & -I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \underset{\text{pido}}{=} \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

Por lo tanto $I_{zz} = I_3$ es momento de inercia principal con eje principal \hat{z} . Lo mismo sucede con la posición del CM, pedimos que $\vec{r}_{CM}' = \mathbf{R} \cdot \vec{r}_{CM} = \vec{r}_{CM}$ y entonces

$$\vec{r}_{CM}' = \begin{pmatrix} x_{CM} \\ y_{CM} \\ -z_{CM} \end{pmatrix} \underset{\text{pido}}{=} \vec{r}_{CM} = \begin{pmatrix} x_{CM} \\ y_{CM} \\ z_{CM} \end{pmatrix} \Rightarrow z_{CM} = 0 \quad (16)$$

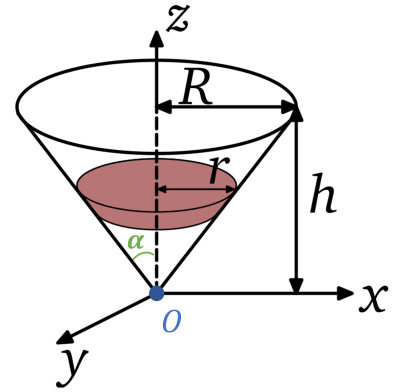
r) Mostrar que cuando el tensor de inercia es totalmente degenerado, sus momentos principales de inercia son invariantes frente a cualquier rotación.

Que sea totalmente degenerado significa que todos sus momentos principales de inercia son iguales; no puedo distinguirlos. Es decir $\mathbf{I} = I\mathbf{1}$. Frente a un rotación \mathbf{R}

$$\mathbf{I}' = \mathbf{R} \cdot (I\mathbf{1}) \cdot \mathbf{R}^T = I\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = I\mathbf{1} = \mathbf{I} \quad (17)$$

Problema 3

a) Queremos calcular el momento de inercia de un cono de altura h y radio R , alineado como en la figura. Nos piden $\mathbf{I}^{(\text{CM})}$. Sin embargo parametrizar el cono desde el CM es una tarea casi imposible. Lo más sensato sería elegir un punto donde la parametrización sea simple, el punto O , y desde allí usar Steiner para ir al CM.



Usando cilíndricas tenemos las siguientes cotas para el volumen del cono

$$0 \leq r \leq z \tan \alpha, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h \quad (18)$$

(podríamos acotar z en función de r también). Notar que $R = h \tan \alpha$. Si la densidad es constante entonces $\rho = M/V$. El volumen del cono es

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{z \tan \alpha} r dr d\theta dz = \frac{\pi R^2 h}{3} \quad (19)$$

Antes de calcular $\mathbf{I}^{(O)}$ pensemos que podemos esperar en base a las simetrías. Recuerden que el tensor de inercia es simétrico, así que no hay que calcular las 9 componentes sino solo 6, y usar que $I_{ij} = I_{ji}$. En el cono además hay simetría de revolución respecto del eje \hat{z} , es un eje de simetría, y vimos en el 1.n) que entonces \vec{r}_{CM} está en dicho eje y que este es un eje principal de inercia. Además, todos los elementos fuera de la diagonal se anularán, y también hay degeneración en el plano: $I_{xx} = I_{yy}$. Eso es lo bueno de las simetrías; nos ahorran cuentas (igual pueden hacerlas para convencerse). Usando simetrías pasamos de 9 integrales a 2

$$\begin{aligned} I_{xx}^{(O)} &= \rho \int (y^2 + z^2) dV = \frac{3M}{\pi R^2 h} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{z \tan \alpha} (r^2 \sin^2 \theta + z^2) r dr d\theta dz \\ I_{zz}^{(O)} &= \rho \int (x^2 + y^2) dV = \frac{3M}{\pi R^2 h} \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{z \tan \alpha} r^2 r dr d\theta dz \end{aligned} \quad (20)$$

Haciendo las integrales...

$$I_{xx}^{(O)} = I_{yy}^{(O)} = \frac{3M}{20} (R^2 + 4h^2), \quad I_{zz}^{(O)} = \frac{3M}{10} R^2 \quad (21)$$

Una vez que tenemos $\mathbf{I}^{(O)}$, usando Steiner (5) podemos calcular $\mathbf{I}^{(\text{CM})}$. Para ello primero necesitamos \vec{r}_{CM} . Ya preveníamos que iba a estar en \hat{z} por la simetría de revolución

$$\vec{r}_{CM} = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^{z \tan \alpha} (r \hat{r} + z \hat{z}) r dr d\theta dz = \frac{3h}{4} \hat{z} \equiv d\hat{z} \quad (22)$$

Como $\vec{r}_O = 0$ entonces $\vec{a} = -\vec{r}_{CM}$, con $a_x = a_y = 0$ y $a_z = -d$. Usando Steiner

$$I_{jk}^{(CM)} = I_{jk}^{(O)} - M [\vec{a}^2 \delta_{jk} - a_j a_k] \Rightarrow \begin{cases} I_{xx}^{(CM)} = I_{xx}^{(O)} - Md^2 = I_{yy}^{(CM)} \\ I_{zz}^{(CM)} = I_{zz}^{(O)} \end{cases} \quad (23)$$

Como la matriz es diagonal, x, y, z son los ejes principales de inercia; solemos llamarlos $I_{xx} \equiv I_1, I_{yy} \equiv I_2, I_{zz} \equiv I_3$. Resumiendo

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

donde las componentes en ambos sistemas son

$$\begin{cases} I_1^{(O)} = I_2^{(O)} = \frac{3M}{20} (R^2 + 4h^2) \\ I_3^{(O)} = \frac{3M}{10} R^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} I_1^{(CM)} = I_2^{(CM)} = \frac{3M}{20} \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right) \\ I_3^{(CM)} = \frac{3M}{10} R^2 \end{cases} \quad (25)$$

A este tipo de objetos que tienen dos momentos principales de inercia iguales se los suele llamar *trompos simétricos*.

b) Calcular $\mathbf{I}^{(CM)}$ para un anillo plano circular de radios r_1 y r_2 .

Solo quiero hacer un comentario técnico sobre distribuciones superficiales. En general uno lo que hace es poner una densidad superficial σ imponiendo a mano que $z = 0$, por ejemplo

$$I_{xx} = \int \sigma (y^2 + 0) dx dy \quad (26)$$

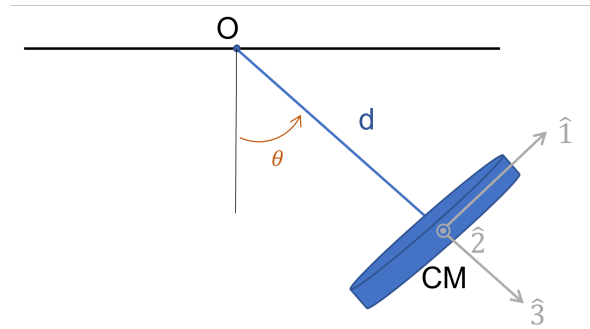
Esto es como pasar diferenciales dividiendo; técnicamente está mal pero como el resultado es el mismo lo usamos. Sin embargo, formalmente la manera correcta sería incluir una delta de Dirac en la densidad volumétrica:

$$\rho(\vec{r}) = \sigma \delta(z) \Rightarrow I_{xx} = \int \sigma \delta(z) (y^2 + z^2) dx dy dz \quad (27)$$

Como $\int \delta(z - z_0) f(z) = f(z_0)$, la delta anula la integral en z y el resultado es el mismo.

Problema Extra (sobre Steiner y la cinética)

Supongamos que tenemos un péndulo físico dado por un disco como se observa en la figura. Dijimos que la cinética se simplifica si la describimos desde un punto fijo o desde el CM. Hagamoslo desde ambos sistemas.



El tensor de inercia del disco es diagonal en los ejes (1,2,3) dibujados (hay simetría en $\hat{3}$). El único grado de libertad es θ . La velocidad angular será $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\hat{2}$.

Desde O, la velocidad es fija ($\vec{v}_O = 0$) por lo que no hay cinética de traslación, solo de rotación respecto de O

$$T^{(O)} = \frac{1}{2}I_2^{(O)}\dot{\theta}^2 \quad (28)$$

Desde el CM sí hay que agregar energía cinética de traslación (del CM), con $\vec{r}_{CM} = d\hat{3}$ y $\vec{v}_{CM} = d\dot{\theta}\hat{1}$

$$T^{(CM)} = \frac{M}{2}d^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_2^{(CM)}\dot{\theta}^2 \quad (29)$$

Ambas cinéticas son iguales; lo único que cambió fue el punto de referencia desde donde describir la rotación. El teorema de Steiner nos corrobora esto

$$\vec{a} = d\hat{3} \Rightarrow I_2^{(O)} = I_2^{(CM)} + Md^2 \quad (30)$$

Problema 7: Ángulos de Euler

Para trabajar en los ejes principales es conveniente utilizar la convención de los ángulos de Euler (ver capítulo 4.4 del Goldstein), donde elegimos los tres ángulos de rotación siguiendo los tres pasos de la figura 1.

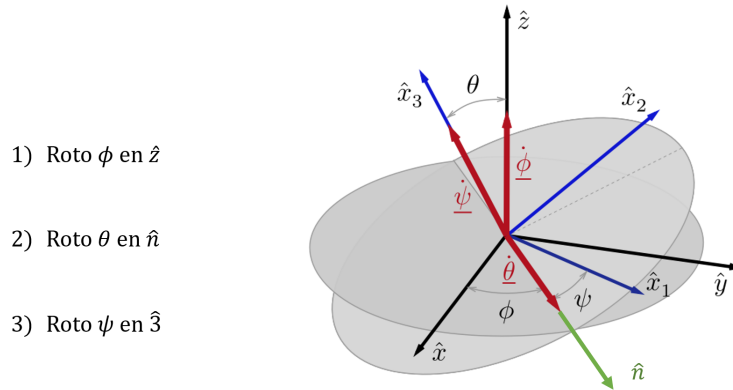


Figura 1: Ángulos de Euler.

Los ejes principales estarán fijos al cuerpo. Podemos escribir estos pasos en forma matemática como la sucesión de tres rotaciones

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_\phi &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{R}_\theta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\
 \mathbf{R}_\psi &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{31}$$

Aplicando cada rotación vamos obteniendo los nuevos versores

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_\phi \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{pmatrix} & \longrightarrow & \mathbf{R}_\theta \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{2}' \\ \hat{3} \end{pmatrix} & \longrightarrow & \mathbf{R}_\psi \begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{2}' \\ \hat{3} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{1} \\ \hat{2} \\ \hat{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{32}$$

(1)
(2)
(3)

Finalmente

$$1) + 2) + 3) : \quad \begin{pmatrix} \hat{1} \\ \hat{2} \\ \hat{3} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{R}_\phi \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \tag{33}$$

Así obtenemos la velocidad angular, que podemos descomponer en los ejes del cuerpo o en los cartesianos (usando que $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$)

ANGULOS DE EULER

$$\vec{\Omega} = \dot{\phi} \hat{z} + \dot{\theta} \hat{n} + \dot{\psi} \hat{3}$$

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \Omega_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \Omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Omega_x = \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \Omega_y = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \\ \Omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{cases} \quad (34)$$

- Por ejemplo, de (32) es fácil descomponer a la nodal en ambos sistemas

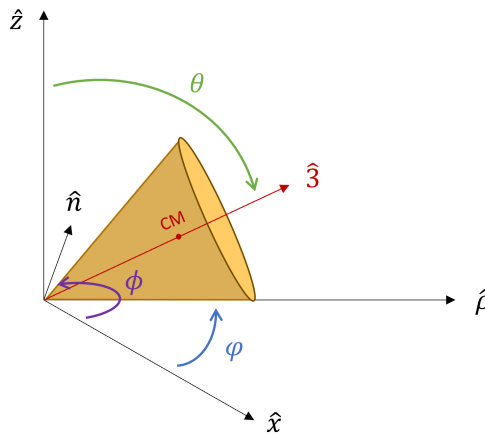
$$\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = R_\phi \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{n} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{n} \\ \hat{2}' \\ \hat{3} \end{pmatrix} = R_\psi^T \begin{pmatrix} \hat{1} \\ \hat{2} \\ \hat{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{n} = \cos \psi \hat{1} - \sin \psi \hat{2} \quad (35)$$

Aplicando estas descomposiciones en $\vec{\Omega}$ obtenemos algunas componentes de (34).

Observación 1: Los ángulos de la figura 1 fueron definidos respecto de los ejes $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, pero si para un ejercicio nos queda más cómodo cambiar estas etiquetas, podemos hacerlo. Por ejemplo si un cuerpo rota con $\dot{\phi} = cte$ pero alrededor del eje \hat{x} en vez de \hat{z} , entonces conviene cambiar etiquetas $(x, y, z) \rightarrow (z, x, y)$ (OJO, siempre manteniendo una terna de mano derecha).

Observación 2: Los ángulos de Euler no suelen coincidir exactamente con los del CM. En la figura vemos que para ir al CM del cono rotamos φ en \hat{z} para ir de \hat{x} a $\hat{\rho}$. En cambio para ir a la nodal necesitamos $\phi = \varphi + \pi/2$.



APÉNDICE: TENSORES

Prop 1: Si dos bases $\hat{x} = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$ y $\hat{x}' = \{\hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \hat{x}'_3\}$ son ortonormales, $\hat{x}'_i \cdot \hat{x}_j = (\hat{x}'_i)^T \cdot \hat{x}_j = \delta_{ij}$, entonces están relacionadas por una transformación ortogonal. Veámoslo. La nueva base puede escribirse en función de la vieja mediante una transformación lineal

$$\hat{x}'_1 = a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 + a_{13}\hat{x}_3 \Rightarrow \hat{x}'_i = \sum_j a_{ij}\hat{x}_j \quad (36)$$

debido a que las expresiones son similares para \hat{x}'_2 y \hat{x}'_3 . Metiendo esta transformación en la propiedad de ortonormalidad

$$\begin{aligned} \delta_{ij} = (\hat{x}'_i)^T \cdot \hat{x}'_j &= \sum_{k,\ell} a_{ik}a_{j\ell} \underbrace{(\hat{x}_k^T \cdot \hat{x}_\ell)}_{=\delta_{k\ell}} = \sum_k a_{ik}a_{jk} \\ &\Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{1} \end{aligned} \quad (37)$$

Prop 2: Ante una transformación ortogonal los vectores preservan la norma. Veámoslo. Primero veamos como transforma un vector. Escrito en dos bases diferentes tenemos

$$\vec{x} = x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3 = x'_1\hat{x}'_1 + x'_2\hat{x}'_2 + x'_3\hat{x}'_3 \quad (38)$$

Como la base es ortonormal, podemos obtener una componente x'_i multiplicando ambos lados por ese vector base \hat{x}'_i

$$x'_i = x_1(\hat{x}'_i \cdot \hat{x}_1) + x_2(\hat{x}'_i \cdot \hat{x}_2) + x_3(\hat{x}'_i \cdot \hat{x}_3) \quad (39)$$

Llamando $a_{ij} = \hat{x}'_i \cdot \hat{x}_j$ podemos reescribir esto en notación matricial

$$x'_i = \sum_j a_{ij}x_j \Rightarrow \vec{x}' = \mathbf{A} \cdot \vec{x} \quad (40)$$

Sabiendo como transforma un vector, vemos que la norma $\|\vec{x}'\|^2 = \vec{x}'^T \cdot \vec{x}'$ se preserva si \mathbf{A} es ortogonal

$$(\vec{x}')^T \cdot \vec{x}' = \vec{x}^T \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}^T \cdot \vec{x} \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1} \quad (41)$$

Tensor

En $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ un tensor de rango N es un arreglo multidimensional de 3^N componentes que transforman ante una transformación ortogonal \mathbf{A} según

$$T'_{ijk\dots}(\vec{x}') = \sum_{\ell mn\dots} a_{i\ell} a_{j m} a_{k n} \dots T_{\ell mn\dots}(\vec{x}) \quad (42)$$

$N = 0$: El tensor es representado por un escalar, $T' = T$.

$N = 1$: El tensor es representado por un vector, $\vec{T}' = \mathbf{A}\vec{T}$.

$N = 2$: El tensor es representado por una matriz de 3×3 , $\mathbf{T}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^T$.

Ejemplo: Dados dos vectores \vec{c} y \vec{d} me fabrico el tensor \mathbf{B} tal que $b_{ij} = c_i d_j$. Este producto se conoce como *diádico* y al ente resultante como *diada*. A veces se lo escribe con el símbolo de producto tensorial $\mathbf{B} = \vec{C} \otimes \vec{D}$. En representación matricial

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} c_1 d_1 & c_1 d_2 & c_1 d_3 \\ c_2 d_1 & c_2 d_2 & c_2 d_3 \\ c_3 d_1 & c_3 d_2 & c_3 d_3 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Para chequear que es un tensor veamos como transforma

$$b'_{ij} = c'_i d'_j = \sum_{\ell m} a_{i\ell} c_{\ell} a_{j m} d_m = \sum_{\ell m} a_{i\ell} a_{j m} b_{\ell m} \quad (44)$$

Grupo Ortogonal $O(n)$

Es el conjunto de matrices \mathbf{O} de $n \times n$ que cumplen

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{O}^T = \mathbf{1} \quad (45)$$

Tomando el determinante de ambos lados, vemos que se clasifican en dos tipos

$$\det(\mathbf{O})^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \det(\mathbf{O}) = +1, \text{ propias (rotaciones)} \\ \det(\mathbf{O}) = -1, \text{ impropias (reflexiones)} \end{cases} \quad (46)$$

En 3D, las rotaciones vienen dadas por

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

GRUPO: Un grupo (G, \circ) es un conjunto G en el que se ha definido una operación binaria interna \circ , que satisface los siguientes axiomas:

- Cierre. $\forall a, b \in G : a \circ b = c \in G$
- Asociatividad. $\forall a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \in G$
- Neutro. $\exists! e \in G : e \circ a = a \circ e = a, \forall a \in G$
- Inversa. $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G : a \circ a^{-1} = e$

Los grupos pueden ser abelianos (conmutativos) o no-abelianos (no-conmutativos).

Por ejemplo para $O(n)$, la operación binaria interna es el producto matricial. Es no-abeliano.

Otro ejemplo es el conjunto $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ de los números reales excluido el cero, que forman un grupo respecto a la multiplicación común. Es abeliano. En cambio \mathbb{R} no es un grupo para la multiplicación común porque el elemento 0 no tiene inversa.