Mecánica Clásica - 2c 2024

Máximo Coppola

Guía 6 - P5

Método Hamiltoniano

Ecuaciones de Hamilton

1. Encontrar $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$.
2. Defininiendo $p_i = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ obtenemos $p(q, \dot{q}, t)$. Invertiendo hallamos $\dot{q}$ en función p.
3. Usando $\dot{q}(q, p, t)$ encontrar $\mathcal{H}(q, p, t) = p\,\dot{q}(q, p, t) - \mathcal{L}(q, \dot{q}(q, p, t), t)$.
4. La dinámica se describe mediante las $2n$ ecuaciones de Hamilton ($1^{\underline{o}}$ orden).

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \qquad \dot{\mathcal{H}} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \tag{1}$$

Si alguna coordenada q_i es cíclica, su momento conjugado p_i se conserva. La misma relación hay entre $\mathcal{H}$ y t (en Noether vimos la conservación de h asociada la homogeneidad del tiempo). Si el Hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, $\mathcal{H}(q, p, t) = h$ se conserva y es la función h que definíamos antes (bueno no es una función... es una constante), que en muchos casos suele coincidir con la energía.

Ejercicio 5

Nos dan una partícula en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{z}$. Vimos en la guía 1 que existen varias formas de elegir el potencial vector $\mathbf{B} = \vec{\nabla} \times \mathbf{A}$ debido a la invariancia de gauge. Por ejemplo podemos elegir el gauge de Landau o el gauge simétrico. Vimos en la guía 1 que el Lagrangiano en el caso general era (en unidades SI)

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{x}}^2 - q\phi + q\,\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \tag{2}$$

Si calculamos el momento vemos que

$$P_k(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_k}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \;\Rightarrow\; \mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \tag{3}$$

En presencia de campos electromagnéticos los momentos conjugados se generalizan de la definición de momento *mecánico* usual $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ al momento *canónico* $\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$. Esto se debe a que el potencial U depende de las velocidades por la presencia de fuerzas magnéticas. Notar que $\mathbf{P}$ depende del gauge (depende de $\mathbf{A}$), mientras que $\mathbf{p}$ es invariante de gauge. El Hamiltoniano resulta ser (chequeenlo)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - q\,\mathbf{A}\right)^2 + q\phi \tag{4}$$

<u>Gauge de Landau</u>

En el ejercicio nos dicen que usemos el gauge de Landau $\mathbf{A} = Bx\hat{y}$. Además $\phi = 0$ (no hay campo eléctrico). El Hamiltoniano se reduce a

$$\mathcal{H} = \frac{(P_x^2 + P_z^2)}{2m} + \frac{(P_y - qBx)^2}{2m} \tag{5}$$

Recordemos de la guía 1 que el movimiento era helicoidal, así que ya voy adelantándome definiendo la frecuencia de ciclotrón $\omega = qB/m$. En z no hay fuerzas, por lo que aparece como coordenada cíclica y obtenemos la conservación de impulso canónico en esa dirección

$$\bullet\ \dot{z} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_z} = \frac{P_z}{m} \qquad ; \qquad \bullet\ \dot{P}_z = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_z = m\dot{z} = cte \tag{6}$$

Vemos que y también es cíclica

$$\bullet\ \dot{y} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_y} = \frac{P_y - m\omega x}{m} \qquad ; \qquad \bullet\ \dot{P}_y = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad P_y = m\dot{y} + m\omega x = cte \tag{7}$$

Debido a la invariancia traslacional en y, P_y se conserva. Pero depende del gauge. Curioso, no? La función h también se conserva porque $\mathcal{H}$ no depende explícitamente del tiempo.

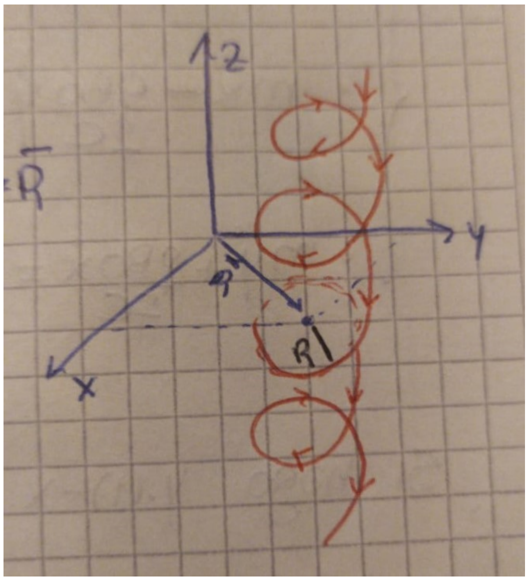
Por último en x tenemos

$$\bullet\ \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_x} = \frac{P_x}{m} \qquad ; \qquad \bullet\ \dot{P}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \omega(P_y - m\omega x) \tag{8}$$

Juntando ecuaciones y definiendo $\bar{x} = P_y/m\omega$ tenemos

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2(x - \bar{x}) \\ \dot{y} = -\omega(x - \bar{x}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x(t) = +R\cos(\omega\, t + \phi) + \bar{x} \\ y(t) = -R\sin(\omega\, t + \phi) + \bar{y} \end{cases} \tag{9}$$

La de arriba es la ecuación de un oscilador con origen en $\bar{x}$, y la de abajo me relaciona el movimiento en y con el de x. La solución de la derecha es la misma que vimos en la guía 1 usando el método Lagrangiano: el movimiento está descrito por el helicoide de la figura, de radio R y centrado en $\bar{\mathbf{R}} = (\bar{x}, \bar{y}, 0)$.



Si $\mathbf{B} = B\hat{z}$ el sistema también tiene invariancia traslacional en x... ¿por qué P_x no se conservó? Porque nuestro gauge rompió esa simetría. Pero la cantidad conservada asociada a la simetría del sistema existe. Combinando distinto las ecuaciones podemos encontrarla

$$\dot{P}_x = m\omega\dot{y} \quad \Rightarrow \quad P_x - m\omega y = m\dot{x} - m\omega y = cte \equiv \tilde{P}_x \tag{10}$$

Lo que se conserva en nuestro gauge de Landau no es el momento mecánico $P_x = m\dot{x}$, sino este nuevo 'momento' $\tilde{P}_x$. Usando la solución hallada se ve que este momento también define el centro del helicoide con $\bar{y} = -\tilde{P}_x/m\omega$.

Gauge Simétrico

En la segunda parte del ejercicio nos dicen que usemos el gauge simétrico $\mathbf{A} = (\mathbf{B}\times\mathbf{r})/2 = (Bx\hat{y} - By\hat{x})/2$. Como $\phi = 0$ (no hay campo eléctrico), el Hamiltoniano se reduce a

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\left(P_x + \frac{qBy}{2}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(P_y - \frac{qBx}{2}\right)^2 + \frac{P_z^2}{2m} \tag{11}$$

con $\omega = qB/m$. Nuevamente, $P_z = m\dot{z} = cte$ y $h = \mathcal{H}$ se conservan, mientras que

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_x} = \dfrac{1}{m}\left(P_x + \dfrac{m\omega}{2}y\right) \\ \dot{y} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_y} = \dfrac{1}{m}\left(P_y - \dfrac{m\omega}{2}x\right) \end{cases}, \qquad \begin{cases} \dot{P}_x = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = +\dfrac{\omega}{2}\left(P_y - \dfrac{m\omega}{2}x\right) = +\dfrac{\omega}{2}m\dot{y} \\ \dot{P}_y = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -\dfrac{\omega}{2}\left(P_x + \dfrac{m\omega}{2}y\right) = -\dfrac{\omega}{2}m\dot{x} \end{cases} \tag{12}$$

donde lo que hicimos al final fue reemplazar el lado izquierdo en el derecho. Resolviendo el sistema recuperamos la solución helicoidal (9) hallada en el gauge de Landau, les dejo eso. Miremos que pasa con la conservaciones

$$\begin{cases} \dot{P}_x - \dfrac{m\omega}{2}\dot{y} = 0 \\ \dot{P}_y + \dfrac{m\omega}{2}\dot{x} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_x - \dfrac{m\omega}{2}y = cte \equiv \tilde{P}_x \\ P_y + \dfrac{m\omega}{2}x = cte \equiv \tilde{P}_y \end{cases} \tag{13}$$

Che pero, ¿son estas las mismas cantidades conservadas que las del gauge de Landau? En ese gauge notamos que P_y se conservaba, pero dependía del gauge. ¿Osea que la cantidad conservada va a variar según el gauge? Pero el sistema físico es el mismo, la cantidad conservada debe ser la misma!

Bueno, lo es. Lo que cambia es la definición de momento *canónico* $\mathbf{P} = \mathbf{p} + q\mathbf{A}$ en cada gauge, por eso a veces se conserva y a veces no. La tabla que sigue aclara esto: las cantidades con moño se conservan

Gauge Landau	Gauge Simétrico
$P_x^L = m\dot{x}$ $P_y^L = m\dot{y} + m\omega x$	$P_x^S = m\dot{x} - m\omega y/2$ $P_y^S = m\dot{y} + m\omega x/2$
$\tilde{P}_x^L = P_x^L - m\omega y$ $\tilde{P}_y^L = P_y^L$	$\tilde{P}_x^S = P_x^S - m\omega y/2$ $\tilde{P}_y^S = P_y^S + m\omega x/2$

Al final, en ambos gauges se conservan las mismas cantidades $\tilde{P}_x = m\dot{x} - m\omega y$, $\tilde{P}_y = m\dot{y} + m\omega x$.

Gauge Simétrico - Cilíndricas

Encontramos 4 cantidades conservadas: $\{\tilde{P}_x, \tilde{P}_y, P_z, h\}$, asociadas a las invariancias traslacionales del sistema, tanto espaciales como temporales. Pero si $\mathbf{B} = B\hat{z}$, también hay simetría de rotación en $\hat{z}$... ¿por qué no apareció L_z? Bueno en realidad si apareció, solo que no explícitamente: combinando las ecuaciones de movimiento en cartesianas se puede encontrar la conservación de L_z.

En el gauge de Landau había invariancia explícita en y. En el gauge simétrico no había ni en x ni en y. Pero si lo escribimos en cilíndricas vemos que $\mathbf{A} = B\hat{z} \times (r\hat{r} + z\hat{z})/2 = (Br/2)\hat{\theta}$. Para calcular $\mathcal{H}$ hay que tener un poco de cuidado con que $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ no tiene unidades de momento lineal, sino angular. Finalmente

$$\mathcal{H} = \frac{P_r^2}{2m} + \frac{1}{2m}\left(\frac{P_\theta}{r} - \frac{m\omega r}{2}\right)^2 + \frac{P_z^2}{2m} \tag{14}$$

donde $P_\theta = p_\theta + qrA_\theta$. Vemos que en este gauge θ es cíclica: se mantiene explícitamente la simetría rotacional! Trivialmente obtenemos, en este gauge con estas coordenadas, la conservación del momento angular *canónico* $L_z = P_\theta = mr^2\dot{\theta} + m\omega r^2$.

Resumen: En $\mathcal{H}$, en vez de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ aparecen los potenciales de gauge φ y $\mathbf{A}$. Por lo tanto, $\mathcal{H}$ y los momentos *canónicos* $\mathbf{P}$ dependen del gauge. Esto hace que en cada Hamiltoniano aparezcan distintas coordenadas cíclicas, con sus momentos conservados asociados. Sin embargo, el problema físico real, junto con todas sus conservaciones, es independiente del gauge que elijamos usar para describirlo. Y efectivamente podemos chequear con cuidado que en cada gauge las soluciones y las cantidades conservadas (que son varias) son las mismas.

Ejercicio 3

Nos dicen que una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera. Pero nos dan un vínculo especial: el radio de la esfera no es fijo, sino que varía en el tiempo según alguna función conocida $r = r(t)$.

El Lagrangiano en esféricas, imponiendo el vínculo $r = r(t)$, viene dado por

$$\mathcal{L}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, t) = \frac{m}{2}\left[\dot{r}(t)^2 + r(t)^2\,\dot{\theta}^2 + r(t)^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right] - mg\,r(t)\cos\theta \tag{15}$$

Es MUY importante notar que, debido al vínculo, el Lagrangiano no es función de (r, θ, ϕ), sino de (θ, ϕ, t). Es decir que este Lagrangiano SÍ depende explícitamente del tiempo, por lo que la función h no se conserva. Claramente lo mismo se obtiene si lo vemos del punto de vista Hamiltoniano. Les dejo chequear que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi, t) &= p_\theta\dot{\theta} + p_\phi\dot{\phi} - \mathcal{L} \\ &= -\frac{m}{2}\dot{r}(t)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\theta^2}{r(t)^2} + \frac{p_\phi^2}{r(t)^2\sin^2\theta}\right) + mg\,r(t)\cos\theta \end{aligned} \tag{16}$$

Notar que en la definición de $\mathcal{H}$ no incluimos a r porque ya no es una variable. $\mathcal{H}$ también depende explícitamente del tiempo, por lo que no se conserva.

En el capítulo 8.2 del Goldstein (2º Edición) hay otro ejemplo con vínculos dependientes del tiempo que puede ser ilustrativo. La intención es resaltar una diferencia sutil entre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{H}$. Mientras que la magnitud de $\mathcal{L} = T - V$ no se altera con distintas elecciones de coordenadas generalizadas (aunque su forma funcional sí), la magnitud de $\mathcal{H}$ sí cambia. Con esto queremos decir que puede que en un sistema $\mathcal{H}$ sea una cantidad que conserve, pero que en otro conjunto de coordenadas sea una cantidad completamente distinta que no se conserve. Veamoslo con un ejemplo.

Supongamos una masa unida a un resorte cuyo extremo está fijo en un auto sin masa que se mueve con velocidad constante v_0.

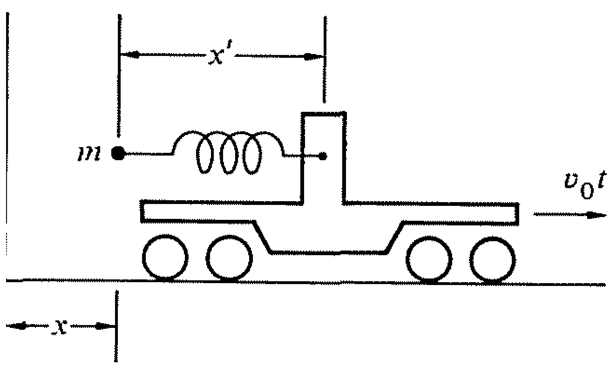


Figura 1: Problema del Goldstein.

Sistema 1: Tomamos como coordenada generalizada la posición x de la masa en un sistema fijo. El Lagrangiano es

$$\mathcal{L}(x,\dot{x},t) = T - V = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}(x - v_0\,t)^2 \;\;\Rightarrow\;\; m\ddot{x} = -k(x - v_0\,t) \tag{17}$$

Una forma simple de resolver esta ecuación es definir la cantidad

$$x' = x - v_0\,t \;\;\rightarrow\;\; m\ddot{x}' = -k\,x' \tag{18}$$

donde x' es el desplazamiento de la masa relativo al auto. Esta ecuación nos dice entonces que para un observador en el auto la partícula exhibe un movimiento oscilatorio armónico, como esperaríamos del principio de Relatividad de Galileo. El Hamiltoniano viene dado por

$$\mathcal{H}(x,p,t) = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}(x - v_0\,t)^2 \tag{19}$$

El Hamiltoniano es la energía *total*, que *no* se conserva porque depende explícitamente del tiempo. Esto se debe a que existe un mecanismo externo (el motor) que ejerce una fuerza no conservativa que hace trabajo para mantener el auto moviéndose con velocidad constante frente al movimiento del resorte.

Sistema 2: Tomemos ahora a la coordenada relativa x' como coordenada generalizada. Recordemos que no podemos escribir a $\mathcal{L}$ desde un sistema no-inercial. Lo que hacemos es reemplazar $x = x' + v_0\,t$ en (17)

$$\mathcal{L}(x',\dot{x}') = \frac{m\dot{x}'^2}{2} + mv_0\,\dot{x}' + \frac{mv_0^2}{2} - \frac{kx'^2}{2} \tag{20}$$

El Hamiltoniano resulta

$$p' = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'} = m(\dot{x}' + v_0) \;\;\rightarrow\;\; \mathcal{H}'(x',p') = \frac{(p' - mv_0)^2}{2m} + \frac{kx'^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = E' - \frac{mv_0^2}{2} \tag{21}$$

El Hamiltoniano cambió en magnitud: ahora $\mathcal{H}'$ no es la energía total del sistema, pero sí se conserva. E' es la energía de la masa desde el auto en movimiento. Se puede verificar que ambos sistemas describen el mismo movimiento de la partícula.