Mecánica Clásica - 2c 2024
Máximo Coppola

Guía 7 - Hamilton-Jacobi

Repaso Teórico

Hemos visto que mediante una transformación canónica podemos llevar el Hamiltoniano a uno nuevo, resolver la dinámica allí y luego volver. Esto va a ser útil si el nuevo Hamiltoniano $\mathcal{K}$ es simple. La pregunta que nos hacemos entonces es: ¿cómo encontramos en general una transformación que simplifique el Hamiltoniano?

Cegados por la ambición vamos a pedir simplificarlo lo máximo posible, al punto de trivializarlo. Vamos a pedir que $\mathcal{K}(Q,P) = 0$ (en lo que sigue q, p, Q, P representan vectores de n variables). Las nuevas ecuaciones diferenciales son triviales: Q y P son constante por ser cíclicas. El peso del cálculo se va a trasladar ahora a tener que invertir y componer funciones para hallar las variables originales (q,p) en función de las nuevas constantes (Q,P). Pero ese peso, aunque no lo parezca, suele ser menor que resolver ecuaciones diferenciales muy complejas.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \text{ difícil: ¿}q(t),\ p(t)\text{?} & \xrightarrow{\text{Transformo con } S(q,P)=?} & \mathcal{K}=0 \\ & & \downarrow \\ \text{Antitransformo: } p=\frac{\partial S}{\partial q},\ \beta=\frac{\partial S}{\partial \alpha} & & \\ \text{Hallo } q(\beta,\alpha,t),\ p(\beta,\alpha,t) & \xleftarrow{\text{Encuentro quién es } S(q,\alpha)} & Q_i=\beta_i,\ P_i=\alpha_i \end{array}$$

<u>*Hamilton-Jacobi*</u>: Para anular $\mathcal{K}$ genéricamente, recurrimos a una función generatriz, que elegimos de tipo 2

$$\mathcal{H}(q,p,t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}(q,P,t) = \mathcal{K}(Q,P,t) = 0 \tag{1}$$

Ojo con la dependencia formal de cada función. Las variables se relacionan entre sí mediante las ecuaciones de la transformación canónica

$$p_k(q,P,t) = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}(q,P,t)\,, \quad Q_k(q,P,t) = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}(q,P,t) \tag{2}$$

A esta generatriz tan especial que anula el nuevo Hamiltoniano la vamos a definir con la letra $F_2 \equiv S$, denominada como función principal de Hamilton (usamos S porque en el fondo es la acción). Reemplazando en (1) la expresión para p de la transformación (2) llegamos a una ecuación diferencial para S

$$\mathcal{H}\left(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,P,t), t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}(q,P,t) = 0 \tag{3}$$

Como tenemos derivadas parciales en $n+1$ variables (q,t), aparecerán $n+1$ constante de integración. Sin embargo hay una de ellas que no aporta nada. Como solo aparecen derivadas de S, $S(q,P,t) + cte$ también es solución, pero esa cte no aparecerá en la dinámica del problema (vamos a terminar derivando a S). Nos quedan n constantes, que llamaremos $\alpha_{1\ldots n}$. Recordemos que, como $\mathcal{K}=0$, $P=cte$, y tenemos n de ellas. Así que una vez que tengamos la solución, podemos asociar a las constantes α con P. Esto es posible porque la ecuación diferencial (3) no contiene derivadas parciales en la variable P.

Cómo hacer esa asociación puede ser un poco confuso. Antes de hacerlo, veamos un ejemplo para explicar el punto. Supongamos que tenemos la ecuación diferencial para un MRUV

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t)=a \quad \Rightarrow \quad x(t)=x_0+v_0(t-t_0)+\frac{a}{2}(t-t_0)^2 \tag{4}$$

donde x_0, v_0, t_0 son constantes de integración. Cuando escribimos la solución no solemos incluir la dependencia en estas constantes, porque estamos resolviendo un ejercicio particular y sabemos su valor. Pero en un caso general, lo más correcto sería explicitar su dependencia

$$x(x_0,v_0,t_0,t)=x_0+v_0(t-t_0)+\frac{a}{2}(t-t_0)^2 \tag{5}$$

Estas constantes no aparecen en la ecuación diferencial (4). Solo aparecen una vez que hallamos la solución. Vamos a hacer lo mismo con S. Vamos a escribir en la solución la dependencia en las constantes de integración, tal que $S(q,\alpha,t)$ es la solución.

En principio tenemos cierta libertad para definir como se relacionan α y P, podrían ser una función de la otra: $f_i(P)=\alpha_i$. Vamos a mantenerlo simple y tomar $P_i=\alpha_i$. Una vez que tenemos la solución $S(q,\alpha,t)$ podemos hallar la dinámica de las variables originales (q,p) invirtiendo las ecuaciones de la transformación (2). Para ello usamos que, como $\mathcal{K}=0$, las variables Q son constantes. Las llamamos $Q_i=\beta_i$. Invirtiendo primero las ecuaciones para Q hallamos $q(\beta,\alpha,t)$, y luego reemplazamos esta expresión en la ecuación para p. Al final del día, las $2n$ constantes (β,α) del nuevo sistema se relacionan con las $2n$ condiciones iniciales (q_0,p_0).

Hasta acá fue todo muy general. Sería difícil resolver un ejercicio sólo con lo dicho hasta ahora. Veamos algunas casos prácticos.

Sistemas Conservativos

Si $\mathcal{H}$ no depende explícitamente del tiempo, entonces se conserva $\mathcal{H}(q,p)=h$. En ese caso la ecuación diferencial (3) se reduce a

$$\mathcal{H}\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}(q,P,t)\right)=h=-\frac{\partial S}{\partial t}(q,P,t) \tag{6}$$

La ecuación quedó separable: derivadas en q por un lado, y derivadas en t por el otro. Integrando el lado derecho y usando el caso simple $P=\alpha$ se obtiene

$$S(q,\alpha,t)=W(q,\alpha)-ht\equiv W(q,\alpha)-\alpha_1 t \tag{7}$$

A W se la suele llamar la función característica. Vemos que h aparece como una de las constantes de la solución S, y dijimos que a esas constantes las definimos como α, así que por convención podemos identificarla como la primera de ellas. Como $P=\alpha$, una de las nuevas variables es la constante h. Es normal sentirse un poco confundidos, miren a la tira de igualdades que llegamos: $\mathcal{H}(q,p) = h = \alpha_1 = P_1$. En general en los ejercicios de la guía $h = E$, así que se suele escribir E en vez de α_1 porque ya sabemos quién es esa constante.

Coordenadas Cíclicas

Vimos que si h se conservaba, entonces la solución (7) era lineal en esa variable. Eso sucede también para cualquier coordenada cíclica. Si por ejemplo, en dos dimensiones, q_2 es cíclica, entonces

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_1, p_1, p_2) \;\Rightarrow\; \dot{p}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = 0 \;\Rightarrow\; p_2 = cte \tag{8}$$

De la ecuación de transformación (2)

$$p_2(q,\alpha,t) = \frac{\partial S}{\partial q_2}(q,\alpha,t) = cte \equiv \alpha_2 \;\Rightarrow\; S(q,\alpha,t) = \tilde{W}(\tilde{q},\alpha,t) + \alpha_2 q_2 \tag{9}$$

donde ya asociamos la constante de la coordenada cíclica p_2 con la constante de integración α_2. Es decir, al hacer la transformación, el nuevo momento es igual al viejo, $P_2 = p_2 = \alpha_2$. Notar que $\tilde{q}$ contiene a todas las coordenadas menos a q_2.

Sistemas Separables Conservativos

En general resolver la ecuación diferencial (3) puede ser difícil si hay muchas variables. El método resulta útil si el sistema es separable. ¿Se acuerdan cuando queríamos hallar el diagrama de fase, que en la ecuación de la energía separábamos la dependencia en cada variable? Haciendo esto nos quedaba una igualdad entre funciones tipo $f(r) = g(z) = cte$, que solo puede cumplirse si ambas son constantes. Si esto es posible, entonces la función principal S también puede separarse, y las funciones W_i se hallan separando variables en la igualdad (6)

$$S(q,\alpha,t) = \sum_i W_i(q_i,\alpha) - \alpha_1 t \;\Rightarrow\; \mathcal{H}\left(q, \frac{\partial W_i}{\partial q_i}(q_i,\alpha)\right) = h \equiv \alpha_1 \tag{10}$$

Hamilton-Jacobi

0. Idea: para resolver un $\mathcal{H}$ difícil, hacemos una transformación canónica con generatriz S que nos lleve a un nuevo Hamiltoniano trivial $\mathcal{K} = 0$, que resolvemos fácilmente mediante las ecs de Hamilton para obtener $Q_k = cte \equiv \beta_k$ y $P_k = cte \equiv \alpha_k$. Queremos antitransformar para hallar la solución del problema original.

1. Hallamos $S(q, \alpha, t)$ resolviendo la ecuación diferencial

$$\mathcal{H}\left(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, \alpha, t), t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}(q, \alpha, t) = 0 \tag{11}$$

   - Si es conservativo, $\mathcal{H} = h = \alpha_1$, entonces $S(q, \alpha, t) = W(q, \alpha) - \alpha_1 t$
   - Si es conservativo y separable entonces $S(q, \alpha, t) = \sum_i W_i(q_i, \alpha) - \alpha_1 t$
   - Si q_j es cíclica entonces $S(q, \alpha, t) = \tilde{W}(\tilde{q}, \alpha, t) + \alpha_j q_j$

2. Invertimos la transformación para hallar q en función del tiempo y las constantes

$$Q_k(q, \alpha, t) = \beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k}(q, \alpha, t) \quad \xrightarrow{\text{Invierto}} \quad \text{Hallo} \quad q(\beta, \alpha, t) \tag{12}$$

3. Reemplazamos $q(\beta, \alpha, t)$ en la otra ecuación de transformación

$$p_k(\beta, \alpha, t) = \frac{\partial S}{\partial q_k}(q, \alpha, t)\bigg|_{q=q(\beta,\alpha,t)} \tag{13}$$

Ejercicio Extra

Una pelota con carga total $q > 0$ sometida a un campo eléctrico constante E en $\hat{y}$ se patea en $t = 0$ con velocidad $\vec{v}_0 = (v_{y0}, v_{z0})$. Hay gravedad en $\hat{z}$. Hallar la evolución de la posición de la pelota $\vec{r}(t)$ usando el método de Hamilton-Jacobi.

El potencial del campo electromagnético viene dado por $U = q\phi - q\vec{v} \cdot \vec{A}$. Podemos calcular los potenciales de gauge para este caso a partir de las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = E\hat{y} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \phi = -Ey \\ \vec{A} = \vec{0} \end{cases} \tag{14}$$

Por lo que el Lagrangiano vendrá dado por

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + qEy - mgz \tag{15}$$

De aquí pasamos al Hamiltoniano, les dejo a ustedes la cuenta

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_y^2 + p_z^2) - qEy + mgz \tag{16}$$

Queremos resolver la ecuación diferencial para S (11). Como $\mathcal{H}$ no depende explícitamente del tiempo entonces $\mathcal{H}(q, p) = h$ se conserva (¿es $h = Energia$?). Vamos a llamar α_1 a h para ser consistentes con la notación. Como el sistema es conservativo proponemos $S(q, \alpha, t) = W(y, z, \alpha) - \alpha_1 t$, con lo que la ecuación diferencial

$$\mathcal{H}\left(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, \alpha, t), t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}(q, \alpha, t) \tag{17}$$

se reduce a

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W(y, z, \alpha)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W(y, z, \alpha)}{\partial z}\right)^2\right] - qEy + mgz = \alpha_1 \tag{18}$$

Como W se deriva por *separado* en derivadas parcial para cada q_i y el potencial también está separado en las coordenadas, proponemos una solución separable para W

$$W(y, z, \alpha) = W_y(y, \alpha) + W_z(z, \alpha) \tag{19}$$

Fíjense que cada W_k depende solo de q_k, pero de todos los α. La ecuación entonces es separable en cada variable. Lo más conveniente es definir una constante para cada dirección

$$\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_y(y, \alpha)}{\partial y}\right)^2 - qEy}_{=\alpha_y} + \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_z(z, \alpha)}{\partial z}\right)^2 + mgz}_{=\alpha_z} = \alpha_1 \tag{20}$$

Es decir redefinimos $\alpha_1 = \alpha_y + \alpha_z$. Haciéndolo de esta manera, cada W_k depende solo de una constante α_k, lo cual simplifica los despejes que siguen. Despejando las W tenemos que

$$
\begin{aligned}
\odot \quad S(q,\alpha,t) &= W_y(y,\alpha) + W_z(z,\alpha) - (\alpha_y + \alpha_z)t \\
\odot \quad W_y(y,\alpha_y) &= \pm\sqrt{2m}\int \sqrt{\alpha_y + qEy}\, dy \\
\odot \quad W_z(z,\alpha_z) &= \pm\sqrt{2m}\int \sqrt{\alpha_z - mgz}\, dz
\end{aligned} \tag{21}
$$

Noten que apareció una duplicidad de signos $\pm$ al tomar la raíz de $\partial W_k/\partial q_k = p_k$, correspondientes a las zonas donde p_k es positivo o negativo. Suele suceder que ese signo no es relevante, pero en principio hay que tener cuidado. Una opción más avanzada es tomar el signo positivo y al final utilizar propiedades que conozcamos del movimiento (por ejemplo dibujando su diagrama de fases) para deducir que pasa con la otra rama negativa.
Otro comentario técnico es que dejé las integrales indefinidas, en vez de partir de un valor inicial. Ese valor inicial solo agregará una constante irrelevante al problema, que puede o bien ser reabsorbida en las β o puede ser eliminada eligiendo inteligentemente ese valor inicial.

Si resolvemos las integrales, obtenemos una solución para $S(q,\alpha,t)$ y completamos el paso 1. En general no es conveniente integrar a esta altura; no nos interesa S sino sus derivadas. Suele ser más util dejarlo expresado así; luego cuando antitransformemos lo que haremos es derivar primero e integrar después. Ahora que tenemos S podemos ir al paso 2 y despejar q_k a partir de la ecuación (12) de transformación para $Q_k = \beta_k$

$$
\begin{aligned}
☽ \quad \beta_y &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_y} = \frac{\partial W_y}{\partial \alpha_y} - t = \pm\frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\alpha_y + qEy}}\, dy - t \\
☽ \quad \beta_z &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_z} = \frac{\partial W_z}{\partial \alpha_z} - t = \pm\frac{\sqrt{2m}}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\alpha_z - mgz}}\, dz - t
\end{aligned} \tag{22}
$$

Como ven estas integrales son muy fáciles de hacer. Hagamos la de z

$$
\beta_z = \pm\frac{\sqrt{2m}}{2}\left(\frac{-2}{mg}\right)\sqrt{\alpha_z - mgz} \tag{23}
$$

Invirtiendo esto se llega al MRUV esperado

$$
z(t) = \frac{\alpha_z}{mg} - \frac{g\beta_z^2}{2} - g\beta_z\, t - \frac{g}{2}\, t^2 = z_0 + v_{z0}\, t - \frac{g}{2}\, t^2 \tag{24}
$$

Vemos como las dos constantes (β_z, α_z) de H-J se relacionan con las dos c.i. (z_0, v_{z0}).

La cuenta para $y(t)$ es muy parecida, solo hay que reemplazar $mg \to -qE$ y $\alpha_z \to \alpha_y$. También podrían hallar $\vec{p}(t)$ siguiendo el paso 3.

Ejercicio 6

Nos dan el siguiente Hamiltoniano

$$\mathcal{H}(q,p) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2 \tag{25}$$

y nos piden resolver el problema usando todos los métodos conocidos. El inciso d) y todo lo que en esta guía diga 'angulo-acción' quedará pendiente hasta la próxima clase. Junto con el ejercicio 4 son buenos para hacer una práctica general.

Antes de resolverlo podemos irnos anticipando a que tipo de órbitas podemos esperar si dibujamos el diagrama de fases. Como $\mathcal{H}$ no depende explícitamente de t, el sistema es conservativo (no sabemos bien si h es E porque no sabemos la cinética y el potencial por separado). Además, q_2 es cíclica, por lo que $p_2 = cte$. Reacomodando un poco la igualdad $\mathcal{H}(q,p) = h$

$$\frac{p_1^2}{2mh} + \frac{(q_1 - p_2/k)^2}{2mh/k^2} \;=\; 1 \;=\; \frac{p_1^2}{A^2} + \frac{(q_1 - p_2/k)^2}{B^2} \tag{26}$$

Para cada valor de p_2 esta es la ecuación de una elipse centrada en $(p_2/k, 0)$, como se observa en la figura 1. ¿Qué tipo de movimiento es este?

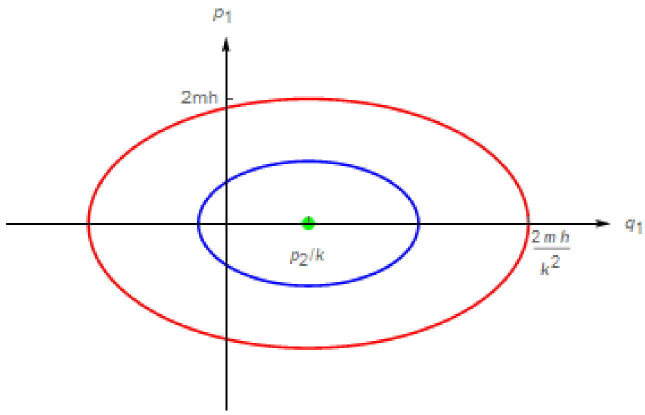

Figura 1: Diagrama de fases del ejercicio 6.

a) Hamilton-Jacobi

El sistema es conservativo y q_2 es cíclica. Proponemos entonces

$$S(q,\alpha,t) = W_1(q_1,\alpha) + \alpha_2 q_2 - \alpha_1 t \tag{27}$$

Voy a seguir con $\alpha_{1,2}$ para mantener la notación del formalismo, pero no hay que perder de vista que la identificación con las variables del problema es inmediata: $\alpha_2 = p_2$ y $\alpha_1 = h$

Reemplazando la S propuesta, la ecuación diferencial queda

$$\mathcal{H}\left(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2m}(\alpha_2 - kq_1)^2 - \alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad W_1(q_1, \alpha) = \pm \int \sqrt{2m\alpha_1 - (\alpha_2 - kq_1)^2}\, dq_1 \tag{28}$$

No integremos todavía. Listo el paso 1, obtenemos $q(\beta, \alpha, t)$ de la ecuación de transformación siguiendo el paso 2

$$\mathfrak{D}\ \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_1} - t = \pm m \int \frac{1}{\sqrt{2m\alpha_1 - (\alpha_2 - kq_1)^2}}\, dq_1 - t \tag{29}$$

$$\Rightarrow \quad \beta_1 + t = \pm \frac{m}{k} \arccos\left(\frac{\alpha_2 - kq_1}{\sqrt{2m\alpha_1}}\right) \tag{30}$$

Esta integral aparece seguido en H-J, empiecen a memorizarla:

$$\int \frac{A}{\sqrt{B^2 - A^2x^2}}\, dx \;=\; -\arccos\left(\frac{A}{B}\, x\right) \tag{31}$$

Al invertir esta ecuación, los signos $\pm$ desaparecen debido a que $\cos(\pm x) = \cos(x)$ y tenemos

$$q_1(\beta, \alpha, t) = -\frac{\sqrt{2m\alpha_1}}{k} \cos\left(\frac{k}{m}t + \frac{k\beta_1}{m}\right) + \frac{\alpha_2}{k} \tag{32}$$

Esa fue la ecuación de transformación para Q_1, para Q_2 tenemos

$$\mathfrak{D}\ \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2} = q_2 + \frac{\partial W_1}{\partial \alpha_2} = q_2 \pm \int \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\sqrt{2m\alpha_1 - (\alpha_2 - kq_1)^2}\, dq_1 \tag{33}$$

Si prestamos un poco de atención notaremos que no es necesario hacer esta integral. Si hacemos el cambio de variables $z = \alpha_2 - kq_1$ entonces derivar respecto de α_2 es igual a derivar respecto de z. Pero también debemos cambiar la variable de integración que es independiente de α_2

$$z = \alpha_2 - kq_1 \;\Rightarrow\; \beta_2 = q_2 \pm \int \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{2m\alpha_1 - z^2}\, \left(\frac{-dz}{k}\right) \tag{34}$$

La primitiva será la función que allí aparece, y por lo tanto

$$\beta_2 = q_2 \mp \frac{1}{k}\sqrt{2m\alpha_1 - (\alpha_2 - kq_1)^2} \tag{35}$$

De aquí podemos despejar a q_2 en función de q_1, obteniendo la órbita en el plano $q_1 - q_2$

$$\left(q_1 - \frac{\alpha_2}{k}\right)^2 + (q_2 - \beta_2)^2 = \frac{2m\alpha_1}{k^2} \;\rightarrow\; (q_1 - \bar{q}_1)^2 + (q_2 - \bar{q}_2)^2 = R^2 \tag{36}$$

que es la ecuación de círculo de radio R centrado en $\bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2)$. Si quisiéramos a q_2 en función de las constantes y el tiempo reemplazamos la solución que encontramos para q_1 de la ecuación (32) en (35)

$$q_2 = \beta_2 \pm \frac{\sqrt{2m\alpha_1}}{k} \left| \sin\left(\frac{k}{m}t + \frac{k\beta_1}{m}\right)\right| \tag{37}$$

¿Qué hacemos con el $\pm$? Antes dijimos que, como $p_1 = \partial W_1/\partial q_1$, la rama positiva (negativa) corresponde a valores positivos (negativos) de p_1, ver ecuación (28). En efecto,

$$p_1 = \frac{\partial W_1}{\partial q_1} = \pm\sqrt{2m\alpha_1} \left|\sin\left(\frac{k}{m}t + \frac{k\beta_1}{m}\right)\right| \quad \Rightarrow \quad q_2 = \beta_2 \pm \frac{1}{k}|p_1| \tag{38}$$

Cuando $p_1 > 0$ tomamos el $+$, y cuando $p_1 < 0$ tomamos el $-$, así que $\pm|p_1| = p_1$.

Finalmente, la solución completa es

$$\boxed{\begin{aligned} q_1(\beta, \alpha, t) &= -R\cos\left(\frac{k}{m}t + \varphi\right) + \bar{q}_1 \\ q_2(\beta, \alpha, t) &= +R\sin\left(\frac{k}{m}t + \varphi\right) + \bar{q}_2 \end{aligned}} \tag{39}$$

donde podemos identificar algunas constantes

$$R = \frac{\sqrt{2m\alpha_1}}{k} = \frac{\sqrt{2mh}}{k}\,, \quad \varphi = \frac{k\beta_1}{m}\,, \quad \bar{q}_1 = \frac{\alpha_2}{k} = \frac{p_2}{k}\,, \quad \bar{q}_2 = \beta_2 \tag{40}$$

Las 4 constantes $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ se relacionan con las 4 condiciones iniciales.

La soluciones son círculos y el Hamiltoniano tiene la forma de la ecuación (25)... ¿Les suena a algo?

Se parece a las soluciones de una partícula en un campo magnético uniforme. El Hamiltoniano en presencia de un campo electromagnético es

$$\mathcal{H}(q, p) = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}\right)^2 \tag{41}$$

($\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}$ es el momento canónico). Vemos que podemos recuperar el Hamiltoniano de la ecuación (25) si

$$A_1 = 0 = A_3 \qquad y \qquad kq_1 = qA_2 \;\Rightarrow\; A_2 = \frac{k}{q}q_1 \tag{42}$$

La constante k no puede ser cualquier cosa. Como $\boldsymbol{B} = B\hat{3} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = k/q\,\hat{3}$ entonces $k = qB$. Este Hamiltoniano corresponde al gauge de Landau.

b) Ángulo Acción

Hay que tener cuidado con a cuáles variables hacemos AA: como $p_2 = cte$, el movimiento no es periódico en esa variable. Sí lo es en $\{q_1, p_1\}$: vimos su diagrama de fases. Así que hacemos un híbrido: HJ para $\{q_2, p_2\}$ + AA para $\{q_1, p_1\}$. Para eso proponemos una generatriz

$$F_2(q, J_1, \alpha_2) \;=\; W_J(q_1, J_1, \alpha_2) + \alpha_2 q_2 \tag{43}$$

que nos lleve a un nuevo Kamiltoniano $\mathcal{K} = h(J_1)$, donde W_J sale de resolver la integral

$$p_1 \;=\; \frac{\partial W_J}{\partial q_1} \;\Rightarrow\; W_J(q_1, J_1, \alpha_2) \;=\; \int p_1 dq_1 \;=\; \pm \int \sqrt{2mh(J_1) - (\alpha_2 - kq_1)^2} \tag{44}$$

como en (28). Para encontrar la relación entre h y el nuevo momento $P_1 = J_1$ calculamos este último mediante su definición. Como $p_1(q_1)$ es simétrico respecto de la horizontal (las ramas con $\pm$), y también respecto de la vertical α_2/k, tenemos

$$J_1 \;=\; \oint \frac{p_1 dq_1}{2\pi} \;=\; 2\int_{\alpha_2/k - 2mh/k^2}^{\alpha_2/k + 2mh/k^2} \frac{|p_1| dq_1}{2\pi} \;=\; 4\int_{\alpha_2/k - 2mh/k^2}^{\alpha_2/k} \frac{|p_1| dq_1}{2\pi} \tag{45}$$

A diferencia de HJ, donde primero derivamos y luego integramos, acá hay que integrar la raíz que figura allí, no podemos escapar... o sí? Estamos haciendo una integral cerrada, es decir calculando un área. Si por casualidad conocemos la figura geométrica, podemos expresar su área. Vimos en (26) que los diagrama de fases $\{q_1, p_1\}$ son elipses. Reemplazando los semiejes

$$J_1 \;=\; \frac{\pi AB}{2\pi} \;=\; \frac{\pi}{2\pi}\,\frac{2mh}{k} \;=\; \frac{mh}{k} \;\Rightarrow\; \boxed{h = \frac{k}{m} J_1} \tag{46}$$

Sin resolver $q(t)$, podemos hallar entonces la frecuencia

$$\omega \;=\; \frac{\partial h}{\partial J_1} \;=\; \frac{k}{m} \tag{47}$$

Para hallar $q(t)$ antitransformamos: $Q_k = \partial F_2 / \partial P_k$. Salteando algunas cuentas...

$$☽\; \theta_1 = \frac{\partial F_2}{\partial J_1} \;\Rightarrow\; q_1(t) = -R\cos(\omega t + \varphi) + \bar{q}_1 \tag{48}$$

$$☽\; \beta_2 = \frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2} \;\Rightarrow\; q_2(t) = +R\sin(\omega t + \varphi) + \bar{q}_2 \tag{49}$$

c) Ecs. de Hamilton

Esta versión ya se pidió en el ejercicio 5 de la guía 6. Usando las ecuaciones canónicas

$$\dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}\,, \qquad \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \tag{50}$$

hay que resolver el sistema y chequear que las soluciones son las mismas que en (39).

***d)* Transformación Canónica**
En este inciso debemos utilizar la transformación $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, donde A y B son constantes que debemos elegir de forma tal que la transformación sea canónica. Lo mismo con las variables no especificadas Q_2 y P_2.

Con esta transformación, el nuevo Hamiltoniano resulta ser

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2m}\frac{Q_1^2}{A^2} + \frac{1}{2m}\frac{P_1^2}{B^2} \tag{51}$$

Nuevamente se conserva $\mathcal{K} = \bar{k}$ y tenemos elipses en el diagrama de fases de (Q_1, P_1). Si la transformación fuese canónica podríamos resolver las ecs de Hamilton en el nuevo sistema

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = +\dfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_1} = \dfrac{P_1}{mB^2} \\ \dot{P}_1 = -\dfrac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_1} = \dfrac{Q_1}{mA^2} \end{cases} \Rightarrow \ \ddot{Q}_1 = -\frac{1}{(mBA)^2}Q_1 \ \Rightarrow \ Q_1 = D\sin\left(\frac{1}{mBA}t + \varphi\right) \tag{52}$$

Por otro lado, $\mathcal{K}$ es cíclico en Q_2 y P_2, por lo que esas variables son constantes. Para hallar q_1 y q_2 debemos anti-transformar. Para ello necesitamos la transformación completa, y necesitamos que sea canónica.

¿Qué formas vimos que existen para probar que la transformación es canónica?

Corchetes de Poisson

Este es el método más simple. La transformación será canónica si $[Q_i, P_j] = \delta_{ij}$, $[Q_i, Q_j] = 0 = [P_i, P_j]$ respecto de las variables (q, p). Es decir, las variables (q, p) ya cumplen esos corchetes, eso es lo que simplifica la cuenta. Notar que son varias relaciones porque $i, j = 1, 2$. Escribiéndolo por extenso con $Q_1 = Ap_1$ y $P_1 = B(p_2 - kq_1)$

$$[Q_1, P_1] = AB\overbrace{[p_1, p_2]}^{=0} - ABk\overbrace{[p_1, q_1]}^{=-1} = ABk = 1 \tag{53a}$$

$$[Q_1, Q_2] = A[p_1, Q_2] = 0 \tag{53b}$$

$$[Q_1, P_2] = A[p_1, P_2] = 0 \tag{53c}$$

$$[P_1, P_2] = B[p_2, P_2] - kB[q_1, P_2] = 0 \tag{53d}$$

$$[P_1, Q_2] = B[p_2, Q_2] - kB[q_1, Q_2] = 0 \tag{53e}$$

$$[Q_2, P_2] = 1 \tag{53f}$$

La primer igualdad nos dice que la transformación es canónica si $ABk = 1$. Como A y B son constantes a elegir, lo más simple sería elegir $B = 1$ (para que P_1 también tenga unidades de momento). Entonces $A = 1/k$. Las demás igualdades nos imponen restricciones sobre Q_2 y P_2.

Una elección simple podría ser $P_2 = p_2$, que sabemos que es una cantidad conservada. En ese caso, la tercer y cuarta línea – (53c) y (53d)– se cumplen automáticamente. La última (53f) nos dice que

$$[Q_2, P_2] = [Q_2, p_2] = \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} = 1 \;\Rightarrow\; Q_2 = q_2 + f(q_1, p_1, p_2) \tag{54}$$

Reemplazando en (53b)

$$[Q_1, Q_2] = A[p_1, Q_2] = A\overbrace{[p_1, q_2]}^{=0} + A\overbrace{[p_1, f(q_1, p_1, p_2)]}^{=-\frac{\partial f}{\partial q_1}} = 0 \;\Rightarrow\; f(q_1, p_1, p_2) = g(p_1, p_2) \tag{55}$$

por lo que la función f no puede depender de q_1. Sino aparecería el corchete $[p_1, q_1] = -1$ que no tiene con quien anularse ($[p_i, p_j] = 0$). Nos queda sólo una ecuación disponible, la (53e)

$$[P_1, Q_2] = B[p_2, Q_2] - kB[q_1, Q_2] = B\overbrace{[p_2, q_2]}^{=-1} + B\overbrace{[p_2, g(p_1, p_2)]}^{=0} - kB\overbrace{[q_1, q_2]}^{=0} - kB\overbrace{[q_1, g(p_1, p_2)]}^{=\frac{\partial g}{\partial p_1}} = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{\partial g(p_1, p_2)}{\partial p_1} = -\frac{1}{k} \;\Rightarrow\; g(p_1, p_2) = -\frac{p_1}{k} + h(p_2)$$

Nos quedó la libertad de elegir la función $h(p_2)$; lo más simple es elegirla igual a cero.

Juntando todo, la transformación canónica que encontramos (no es la única) es

$$\boxed{Q_1 = \frac{p_1}{k}\,, \quad P_1 = p_2 - kq_1\,, \quad Q_2 = q_2 - \frac{p_1}{k}\,, \quad P_2 = p_2} \tag{56}$$

Podemos chequear algunas cosas.

- Dijimos que como Q_2 era cíclica en el nuevo Hamiltoniano $\mathcal{K}$, entonces $Q_2 = cte$. En la guía 1 también resolvimos este ejercicio en el gauge de Landau, y encontramos la cantidad conservada $\tilde{P}_x$. Así que en ambos métodos encontramos la cantidad conservada $\tilde{P}_x = -kQ_2 = cte$.
- Usando que $p_1 = kQ_1$ y la solución de la ecuación (52) tenemos que

$$p_1 = kQ_1 = kD \sin\left(\frac{k}{m}t + \varphi\right) \tag{57}$$

Pueden compararla con la expresión (38); coinciden!
De hecho, completando la anti-transformación se recupera la solución (39).

Pueden repetir este procedimiento, o bien chequear que la transformación (56) es canónica, usando alguno de los otros métodos que vimos: encontrando una función generatriz, chequeando las condiciones directas o utilizando el método simpléctico.