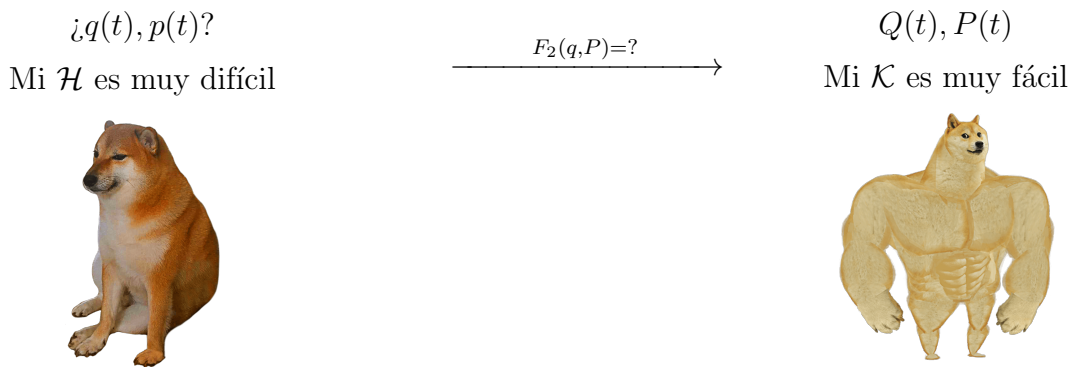


REPASO: H-J Y A-A

Tanto Hamilton-Jacobi como Ángulo-Acción son transformaciones dadas por una función generatriz F_2 . Resulta un poco confuso que empiezan a aparecer muchas letras, pero hacemos eso para diferenciar una transformación de otra. En el fondo, el mecanismo es el mismo para todos los métodos: elegimos un nuevo Hamiltoniano donde resolvemos fácilmente el sistema, hallamos la generatriz que nos lleva a él y antitransformamos para volver a las variables originales



- | | | |
|--|--|--|
| <p>4) Antitransformo: $p = \frac{\partial F_2}{\partial q}$, $Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
 Hallo $q(Q, P, t)$, $p(Q, P, t)$</p> | $\xleftarrow{3) \text{ Encuentro quién es } F_2(q,P)}$ | <p>1) Elijo \mathcal{K}
 2) Hallo $Q(t), P(t)$</p> |
|--|--|--|

Abajo está detallado en una tabla los nombres de las variables que usamos en cada caso. En el fondo todo es convención y como siempre hay más de una, así que tómenlo solo como una guía. Para A-A asumí que el sistema es conservativo.

	HAMILTON-JACOBI	ÁNGULO-ACCIÓN
	$(Q, P) \equiv (\beta, \alpha)$	$(Q, P) \equiv (\theta, J)$
1)	$\mathcal{K} = 0$	$\mathcal{K} = h(J)$
2)	$Q_k = \beta_k = cte$ $P_k = \alpha_k = cte$	$J_k = \frac{1}{2\pi} \oint p_k dq_k = cte$ $\omega_k = \frac{\partial h}{\partial J_k} = \left(\frac{\partial J_k}{\partial h} \right)^{-1}$ $\theta_k = \omega_k t + \theta_{k0}$
3)	$\mathcal{H} \left(q, p = \frac{\partial S}{\partial q}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$ $F_2(q, P, t) \equiv S(q, \alpha, t)$	$\mathcal{H} \left(q, p = \frac{\partial W_J}{\partial q}, t \right) = h(J)$ $F_2(q, P, t) \equiv W_J(q, J)$
4)	$\beta_k = \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} \rightarrow q(\beta, \alpha, t)$	$\theta_k = \frac{\partial W_J}{\partial J_k} \rightarrow q(\theta_0, J, t)$

Tabla 1: Tabla-resumen de H-J y A-A. En A-A se asumió que el sistema es conservativo $\mathcal{H} = h$.

Ejercicio 8

Nos dicen que una partícula se mueve en un potencial

$$\mathcal{H} = E = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad V = \frac{m\lambda^2}{2}(|q| - a)^2 = \begin{cases} \frac{m\lambda^2}{2}(q + a)^2, & \text{si } q \leq 0 \\ \frac{m\lambda^2}{2}(q - a)^2, & \text{si } q \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Este potencial corresponde a un movimiento oscilatorio alrededor de los puntos $\pm a$, como podemos ver de la figura 1. Existen dos regiones diferenciadas; en una la oscilación es alrededor de un único mínimo mientras que en la otra la partícula oscila alrededor de dos mínimos. Podemos encontrar puntos de retorno \bar{q}_r cuando $p = 0$

$$E = \frac{m\lambda^2}{2}(|\bar{q}_r| - a)^2 \Rightarrow |\bar{q}_r| = a \pm \sqrt{\frac{2E}{m\lambda^2}} \geq 0 \quad (2)$$

- **Separatriz.** El valor particular de energía $E = E_s$ separa los dos tipos de movimiento, y está dado por el valor de V_{eff} cuando $p = q = 0$ con puntos de retorno en $\pm \bar{q}_s$

$$E_s = V_{eff}(q = 0) = \frac{m\lambda^2}{2}a^2 \quad \rightarrow \quad \pm \bar{q}_s = a + \sqrt{\frac{2E_s}{m\lambda^2}} = 2a \quad (3)$$

- **Región 1: Libración.** En esta región la partícula oscila alrededor de un único mínimo fijo en $q_{eq} = -a$. No podemos pasar de un mínimo a otro porque la energía no es suficiente para superar la barrera de potencial. Según las condiciones iniciales empezaremos en una región y en esa nos quedamos. En este caso estamos en $q < 0$. Si $E < E_s$ tenemos cuatro puntos de retorno, dos con $q > 0$ y dos con $q < 0$. Los dos con $q < 0$ correspondientes a esta región son

$$-\bar{q}_1 = -\left(a - \sqrt{\frac{2E}{m\lambda^2}}\right), \quad -\bar{q}_2 = -\left(a + \sqrt{\frac{2E}{m\lambda^2}}\right) \quad (4)$$

- **Región 2: Libración.** Esta región es totalmente análoga a la región 1, con la diferencia que ahora $q > 0$ y la oscilación es alrededor de $q_{eq} = +a$. Los dos puntos de retorno de esta región son $+\bar{q}_1$ y $+\bar{q}_2$.
- **Región 3: Libración.** En esta región la partícula oscila alrededor de dos mínimos. Aunque en todas las regiones tenemos libración, son oscilaciones diferentes, por eso les ponemos distintos colores. Si $E > E_s$ solo tenemos dos puntos de retorno porque la rama $a - \sqrt{2E/m\lambda^2}$ es < 0 y por lo tanto no puede ser igual al valor absoluto $|\bar{q}_r|$. Los llamaremos $\pm \bar{q}_3 = a + \sqrt{2E/m\lambda^2}$. La definición de \bar{q}_3 es igual a \bar{q}_2 pero la energía es más grande.

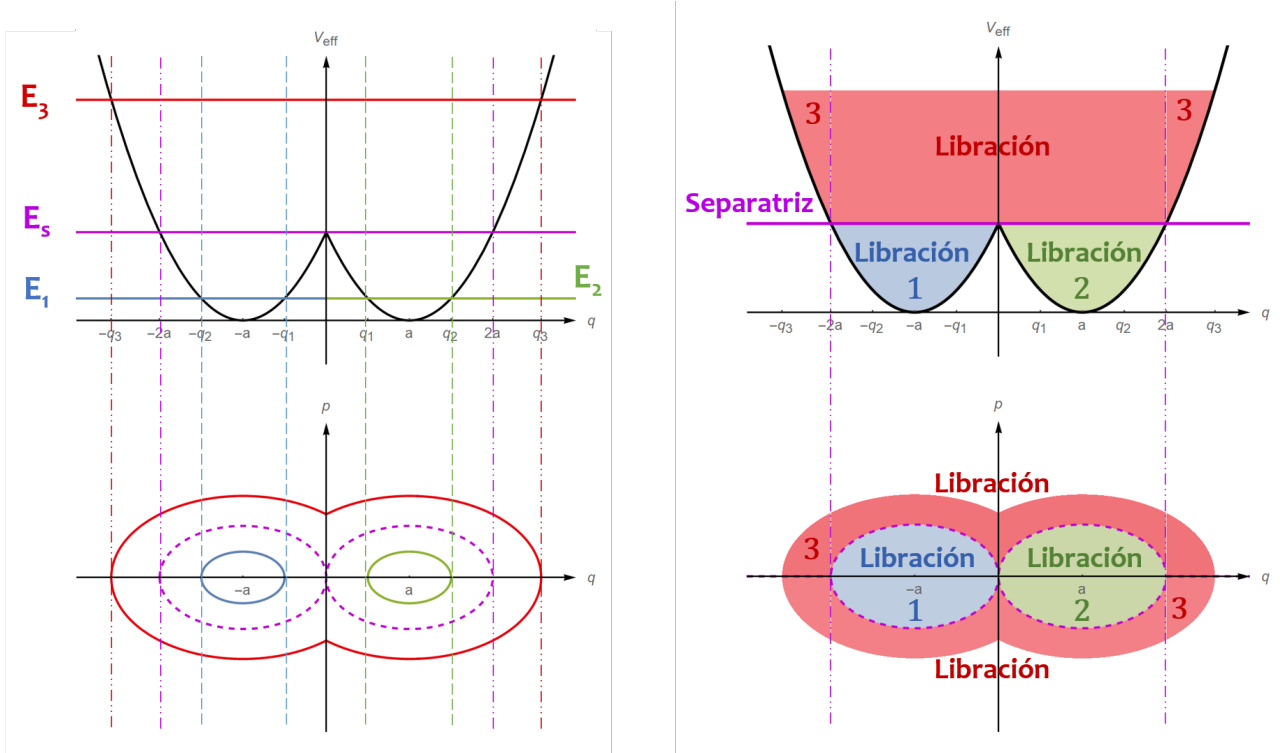


Figura 1: Potencial efectivo y diagrama de fases para ejercicio 8.

El diagrama de fases es simétrico respecto del eje horizontal. Esto pasa siempre para expresiones de la forma $E = p^2/2m + V(q)$. Para calcular la variable de acción solo es necesario calcular la mitad superior con $p > 0$; la mitad inferior será igual por simetría. Explícitamente,

$$\begin{aligned}
 2\pi J &= \oint p dq = \int_{\bar{q}_A}^{\bar{q}_B} \sqrt{2m(E - V)} dq + \int_{\bar{q}_B}^{\bar{q}_A} \left(-\sqrt{2m(E - V)}\right) dq \\
 &= 2 \int_{\bar{q}_A}^{\bar{q}_B} \sqrt{2m(E - V)} dq
 \end{aligned} \tag{5}$$

Cada región tiene asociada una variable de acción distinta debido a que los puntos de retorno son distintos en cada caso

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\bar{q}_3}^{\bar{q}_3} \sqrt{2mE_3 - m^2\lambda^2(|q| - a)^2} dq \\
 J_1 = J_2 &= \frac{2}{2\pi} \int_{\bar{q}_1}^{\bar{q}_2} \sqrt{2mE_2 - m^2\lambda^2(q - a)^2} dq
 \end{aligned} \tag{6}$$

Para hallar $J_i(E)$ hay que hacer la integral que figura allí. Notar que $J_1 = J_2$ porque esas áreas son iguales; el potencial es simétrico en q . Así que basta con calcular solo una (yo elegí $q > 0$).

Uno puede hacer la integral en cada caso y chequear que para la región 2 el resultado es $J_2 = E/\lambda$. Pero hay un atajo; se basa en explotar el hecho de que $2\pi J = Area$. Si justo conocemos el área de la figura que estamos integrando, por ser una forma geométrica conocida, entonces podemos aprovecharlo para simplificar el cálculo. En nuestro caso tenemos una elipse; si reacomodamos un poco los términos en la ecuación de la energía ($q > 0$)

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\lambda^2}{2}(q-a)^2 = E_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2mE_2} + \frac{(q-a)^2}{2E_2/m\lambda^2} = \frac{p^2}{B^2} + \frac{(q-a)^2}{A^2} = 1 \quad (7)$$

Por lo tanto podemos llegar fácilmente a que

$$J_2 = \frac{Area}{2\pi} = \frac{\pi AB}{2\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2mE_2} \sqrt{\frac{2E_2}{m\lambda^2}} = \frac{E_2}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_1 = \omega_2 = \frac{\partial E_2}{\partial J_2} = \lambda} \quad (8)$$

La frecuencia en las regiones 1 y 2 es λ , como podríamos anticipar de la forma del \mathcal{H} .

Para la zona 3 el movimiento se dificulta un poco, el área ya no es conocida. En este caso en particular el potencial es simétrico también respecto del eje vertical (cambiar $q \leftrightarrow -q$ no modifica el módulo), así que en vez de calcular $2 \int_{-q_3}^{q_3}$ podríamos calcular $4 \int_0^{q_3}$. Fijense que tenemos $\sqrt{1 - a\lambda^2 q^2}$, que se parece a una función trigonométrica tipo $\cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2(u)}$. Haciendo el cambio de variables $\sin(u) = \sqrt{m\lambda^2/2E_3}(q-a)$ y explotando todas las simetrías (vertical y horizontal) tenemos que

$$\begin{aligned} 2\pi J_3 &= 4\sqrt{2mE_3} \int_0^{q_3} \sqrt{1 - \frac{m\lambda^2}{2E_3}(q-a)^2} dq \\ &= 4\sqrt{2mE} \int_{u(0)}^{u(\bar{q}_3)} \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2(u)}}_{=\cos(u)} \left(\sqrt{\frac{2E_3}{m\lambda^2}} \cos(u) du \right) \\ &= \frac{8E_3}{\lambda} \int_{u(0)}^{u(\bar{q}_3)} \cos(u)^2 du = \dots \\ &= \frac{4E_3}{\lambda} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(\sqrt{\frac{m}{2E_3}} \lambda a \right) - \sqrt{\frac{m}{2E_3}} \lambda a \sqrt{1 - \frac{m}{2E_3} \lambda^2 a^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

donde se usó que $\cos(\arcsin(Ax)) = \sqrt{1 - A^2 x^2}$. Como vemos, usar el área en 2 es más fácil que realizar una integral de este tipo.

Si quisieramos la frecuencia simplemente calculamos $\omega_3 = (\partial J_3 / \partial E_3)^{-1}$.

Un buen chequeo es que en el límite $E_3 \rightarrow E_S$, $J_3 \rightarrow 2E_S/\lambda$ es la suma de las acciones $J_1 + J_2$ en el mismo límite.

MORALEJA: SI CONOCE EL ÁREA, ÚSELA!

Vimos que $\omega_1 = \omega_2 = \lambda$ (ω_3 también crece con λ). Un breve comentario al respecto. El valor de λ marca la pendiente de la cuadrática: si aumenta, el V_{eff} crecerá más rápidamente y la distancia entre los puntos de retorno será menor. En la figura 2 se muestra el potencial efectivo para diversos valores de λ .

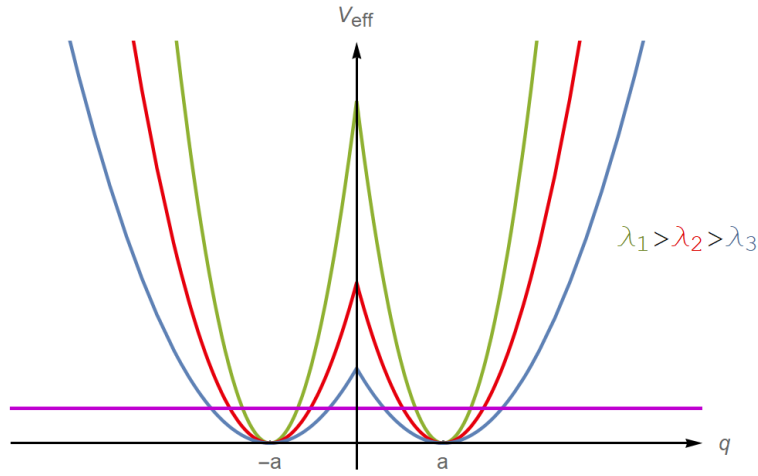


Figura 2: Potencial efectivo para distintos valores de λ .

Si quisieramos hallar $q(t)$ seguimos los pasos 3) y 4) de la Tabla (1). Primero necesitamos hallar la generatriz de tipo 2 de la transformación canónica $W_J(q, J)$ que hicimos para pasar a variables de A-A. Hagamoslo solo para la región 2. Recordemos que allí $E_2 = \lambda J_2$

$$W_2(q, J) = \int^{q_2} p(q', J) dq' = \pm \int^{q_2} dq' \sqrt{2m\lambda J_2 - m^2 \lambda^2 (q' - a)^2} \quad (10)$$

No integremos todavía. Antitransformando [ver paso 4)] recuperamos la variable original $q(t)$

$$\theta_2(\theta_0, t) = \frac{\partial W_2}{\partial J_2} = \pm m\lambda \int^{q_2} \frac{dq'}{\sqrt{2m\lambda J_2 - m^2 \lambda^2 (q' - a)^2}} \quad (11)$$

Si cambiamos variables $x = q' - a$ volvemos a obtener la integral del arc cos que vimos hace unas clases. A $\theta_2(\theta_0, t) = \omega_2 t + \theta_0$ ya lo conocemos. Igualando ambos lados finalmente nos queda la ecuación de la antitransformación que debemos invertir

$$\lambda t + \theta_0 = \mp \arccos \left(\frac{m\lambda}{\sqrt{2m\lambda J_2}} (q_2 - a) \right) \quad (12)$$

Como esperábamos, la solución es un oscilador armónico alrededor del mínimo a

$$q_2(\theta_0, J_2, t) = a + \sqrt{\frac{2J_2}{m\lambda}} \cos(\lambda t + \theta_0) \quad (13)$$

HAMILTON-JACOBI

¿Cómo se hacía este mismo ejercicio por H-J? La diferencia es que en este método la generatriz sí depende del tiempo, de forma tal que $\mathcal{K} = 0$. Como el sistema es conservativo probamos con la forma $S = W(q, E) - Et$. Metiendolo en la ecuación diferencial encontramos

$$\mathcal{H}\left(q, p = \frac{\partial W}{\partial q}\right) = E \quad \Rightarrow \quad W(q, E) = \pm\sqrt{2m} \int^q dq' \sqrt{E - V(q')} \quad (14)$$

Esta función $W(q, P)$ es la misma que la de AA en (10). La única diferencia es que en AA el nuevo momento es $P = J$, mientras que en HJ es $P = E$. Para la zona 2 ambas están relacionadas por $E_2 = \lambda J_2$.

Para hallar $q(t)$ simplemente hay que invertir la siguiente ecuación de transformación

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial W}{\partial E} - t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int^q \frac{dq'}{\sqrt{E - V(q')}} - t \quad (15)$$

Por ejemplo para la zona 2 tenemos

$$t + \beta_2 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int^{q_2} \frac{dq'}{\sqrt{E_2 - m\lambda^2(q' - a)^2/2}} = \mp\frac{1}{\lambda} \arccos\left(\frac{m\lambda}{\sqrt{2mE_2}}(q_2 - a)\right) \quad (16)$$

La solución es el mismo oscilador de (13), pero ahora expresado en término de otras constantes (β, E) en vez de (θ_0, J)

$$q_2(\beta_2, E_2, t) = a + \sqrt{\frac{2E_2}{m\lambda^2}} \cos(\lambda t + \lambda\beta_2) \quad (17)$$

Fijense que en HJ recién nos enteramos de cual es la frecuencia al hallar $q(t)$. Lo interesante del método de AA es que permite calcular la frecuencia de forma rápida sin necesitar $q(t)$. Esto va a ser útil por ejemplo en la zona 3, donde en vez de hallar $q_3(t)$, lo que implicar invertir alguna ecuación de transformación, hallamos J_3 y derivamos para obtener $\omega_3 = (\partial J_3 / \partial E_3)^{-1}$.