

REPASO: RELATIVIDAD

En relatividad el tiempo no es absoluto, por lo que ante un ‘boost’ (pasar a un sistema que se mueve con velocidad constante \vec{V} respecto del original) las coordenadas transforman según las transformaciones de Lorentz (en vez de las de Galileo). Estas transformaciones mantienen invariante cierta cantidad: el *intervalo* s^2

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \\ \vec{x}' = \vec{x} - \gamma \vec{\beta} ct + (\gamma - 1)(\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \vec{\beta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c} \\ x^\mu = (ct, \vec{x}) \Rightarrow x^\mu x_\mu = s^2 = cte \end{cases} \quad (1)$$

El lagrangiano relativista de una partícula en presencia de un potencial $V(q)$ se escribe (en cierto sistema de referencia) como

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{q}}^2}{c^2}} - V(q) \quad (2)$$

Si el potencial no depende del tiempo se conserva la energía

$$\vec{p} = \gamma_u m \dot{\vec{q}} \rightarrow E = \gamma_u mc^2 + V(q) \quad (3)$$

(notar que en este caso γ depende de $\dot{\vec{q}} \equiv \vec{u}$).

Para el caso de una partícula libre tenemos que

$$\begin{cases} \vec{p} = \gamma_u m \dot{\vec{q}} \\ E = \gamma_u mc^2 \end{cases} \Rightarrow E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} \quad \left| \quad \begin{cases} p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p}) = mu^\mu \\ p^\mu p_\mu = 0 \text{ y } u^\mu u_\mu = c^2 \end{cases} \right. \quad (4)$$

Como vemos, escrito en notación cuadvectorial cualquier cuadvector al cuadrado será un invariante relativista.

Un caso especial es el fotón, el cual tiene masa nula y es tratado cuánticamente.

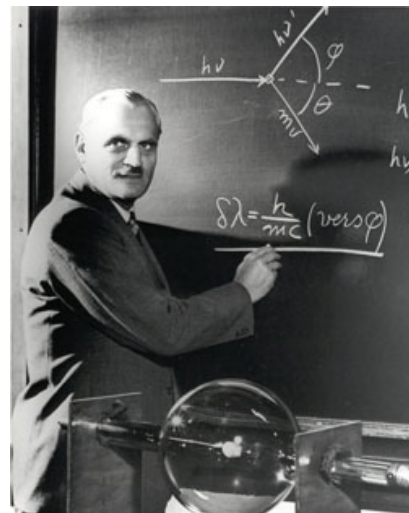
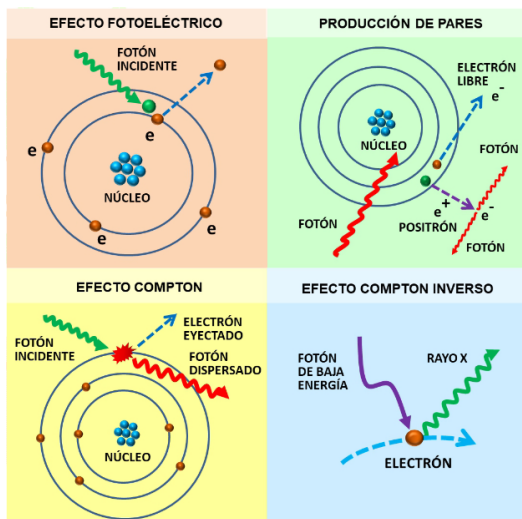
$$\text{Fotón: } \begin{cases} m_\gamma = 0 \\ E_\gamma = h\nu = \hbar\omega \\ |\vec{p}_\gamma| = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \end{cases} \Rightarrow E_\gamma = c|\vec{p}_\gamma| \rightarrow \nu\lambda = \frac{\omega}{k} = c \quad (5)$$

Scattering de Compton

El fotón es una partícula de masa nula cuya energía vale $E = h\nu$, con h la constante de Planck. Se tiene que un fotón de longitud de onda λ incide sobre un electrón en reposo, de masa m , saliendo con una longitud de onda λ' y un ángulo θ después del choque. Muestre que

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) \quad (6)$$

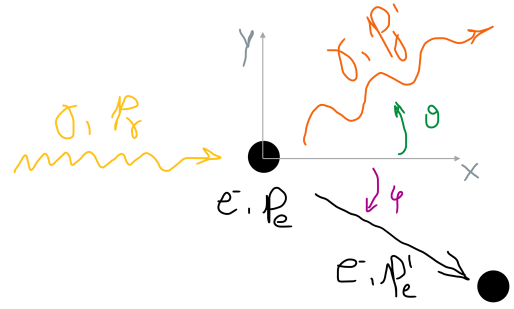
Existen distintos tipos de interacción radiación-materia. En la figura de abajo hay algunos ejemplos. A bajas energías del fotón (del orden de algunos eV) domina el efecto fotoeléctrico, donde un electrón absorbe toda la energía y es eyectado del átomo al que pertenece. Para energías entre 200 keV a 10 MeV, domina el scattering de Compton; el fotón colisiona con el electrón transfiriendole parte de su momento (lo que cambia su longitud de onda). Para energías altas (mayores a 10 MeV) los fotones poseen la suficiente energía ($E_\gamma > 2m_e c^2 \simeq 1 \text{ MeV}$) para formar un par electrón-positrón.



El término efecto Compton se suele usar para describir el inusual resultado observado cuando rayos-X son dispersados en ciertos materiales. Según la teoría clásica, cuando la onda electromagnética es dispersada por los átomos del material, la longitud de onda resultante debería ser igual a la incidente. Sin embargo, Arthur Compton demostró experimentalmente en 1922 que esta predicción era errónea. En 1923 dio una explicación teórica con la cuenta que haremos a continuación, donde usó la idea de Einstein de que la luz en ciertos casos se comporta como una partícula en vez de como una onda. Esto le valió el premio Nobel de 1927. El efecto Compton tiene un lugar importante en la historia de la física porque muestra que la radiación electromagnética no puede ser descrita puramente como un fenómeno ondulatorio. La explicación del efecto Compton dio a la comunidad física un argumento convincente que las ondas electromagnéticas pueden comportarse como un flujo de fotones, cada uno con un comportamiento ondulatorio. Esta explicación refuerza la idea de Einstein que empezó con el efecto fotoeléctrico en 1905 y que le valió el Nobel en 1921.

Mientras no sucede el choque (antes y después), las partículas son libres, por lo que se cumplen las relaciones en (4). Además como el choque es elástico se conserva el cuadrimomento $p_i^\mu = p_f^\mu$ (energía+momento).

Es decir, $p_e^\mu + p_\gamma^\mu = p_e'^\mu + p_\gamma'^\mu$.



Escribimos los momentos de cada partícula. El electrón está inicialmente en reposo, por lo que $\vec{p}_e = 0$ y $E_p = mc^2$. El fotón inicialmente incide en la dirección $\vec{p}_\gamma = \hbar k \hat{x}$

$$p_e^\mu = (mc, 0, 0, 0) \quad , \quad p = |\vec{p}| = 0 \quad (7)$$

$$p_\gamma^\mu = \hbar k (1, 1, 0, 0) \quad , \quad k = |\vec{k}| \quad (8)$$

$$p_e'^\mu = \left(\sqrt{m^2 c^2 + p'^2}, p' \cos \varphi, -p' \sin \varphi, 0 \right) \quad , \quad p' = |\vec{p}'| \quad (9)$$

$$p_\gamma'^\mu = \hbar k' (1, \cos \theta, \sin \theta, 0) \quad , \quad k' = |\vec{k}'| \quad (10)$$

Queremos $\lambda'(\lambda, \theta)$; nada con p' ni φ . Para sacarnos esas variables de encima, lo más fácil es elevar el cuadrimomento $p_e'^\mu$ al cuadrado, aprovechando que $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$ es conocido

$$(p_e'^\mu)^2 = (p_e^\mu + p_\gamma^\mu - p_\gamma'^\mu)^2 = \underbrace{(p_e^\mu)^2}_{=0} + \underbrace{(p_\gamma^\mu)^2}_{=0} + (p_\gamma'^\mu)^2 + 2p_e^\mu \cdot p_{\gamma,\mu} - 2p_e^\mu \cdot p'_{\gamma,\mu} - 2p_\gamma^\mu \cdot p'_{\gamma,\mu} \quad (11)$$

Usando $p_A^\mu \cdot p_{B,\mu} = E_A E_B - \vec{p}_A \cdot \vec{p}_B$, $k = 2\pi/\lambda$ y $\hbar = h/2\pi$ llegamos sencillamente a

$$0 = mc \cdot \hbar k - mc \cdot \hbar k' - (\hbar k \cdot \hbar k' - \hbar k \cdot \hbar k' \cos \theta) \quad (12)$$

$$\Rightarrow \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \equiv \lambda_c (1 - \cos \theta) \quad (13)$$

El término $\lambda_c \sim 0,002 \text{ nm}$ se conoce como la *longitud de onda de Compton*.

Si el enfoque canchero les pareció mucho, podemos hacer el enfoque canónico: planteamos conservación de energía y de momento

- *Energía* : $mc + \hbar k = \sqrt{m^2 c^2 + p'^2} + \hbar k'$ (14)

- *Momento \hat{x}* : $\hbar k = p' \cos \varphi + \hbar k' \cos \theta$ (15)

- *Momento \hat{y}* : $0 = -p' \sin \varphi + \hbar k' \sin \theta$ (16)

Reacomodando las expresiones (15) y (16) y elevando al cuadrado obviamos la variable φ

$$p'^2 = p'^2 \cos^2 \varphi + p'^2 \sin^2 \varphi = \hbar^2 (k - k' \cos \theta)^2 + \hbar^2 k'^2 \sin^2 \theta = \hbar^2 (k^2 - 2kk' \cos \theta + k'^2) \quad (17)$$

Por otro lado de la ecuación de la energía (14)

$$p'^2 = (mc + \hbar k - \hbar k')^2 - m^2 c^2 = 2mc\hbar(k - k') + \hbar^2(k^2 - 2kk' + k'^2) \quad (18)$$

Igualando las ecuaciones (17) y (18) recuperamos (13).

¿Con qué tipo de luz creen que sería más fácil ver este efecto?

◆ Rayos-X: 1 nm

◆ Visible: 550 nm

◆ Infrarrojo: 1000 nm

Para que la desviación sea significativa necesitamos $\lambda \sim \lambda_c$, por eso se usaron Rayos-X.

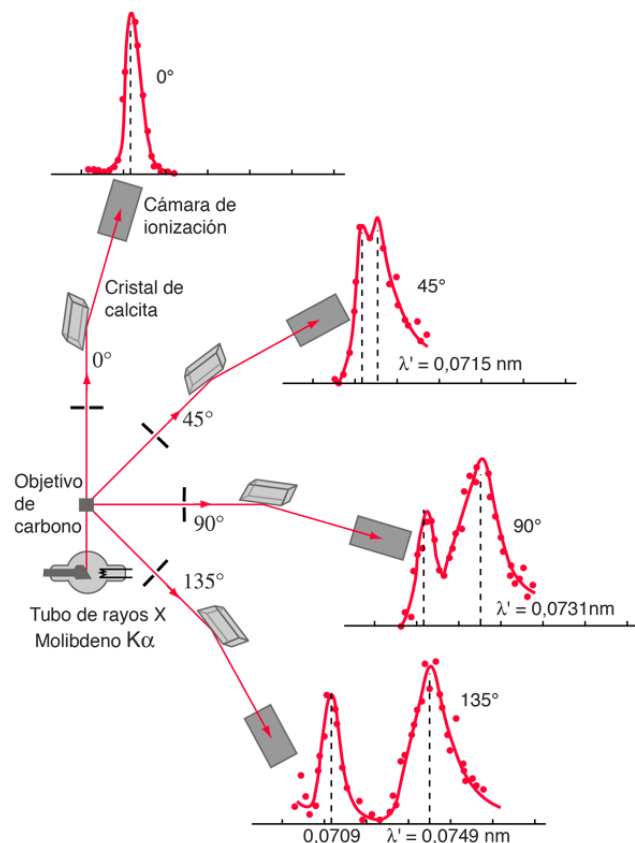
El fotón incidente le cede parte de su energía al electrón (energía cinética que lo pone en movimiento). Al perder energía, como $E = h\nu = hc/\lambda$, su longitud de onda aumenta.

En la figura de la derecha lo que se observa experimentalmente es un grafico de intensidad (número de fotones) vs longitud de onda a la salida (I vs λ').

Vemos la presencia de dos picos, que varían según el ángulo de medición.

La cuenta que hicimos asumió electrones en reposo.

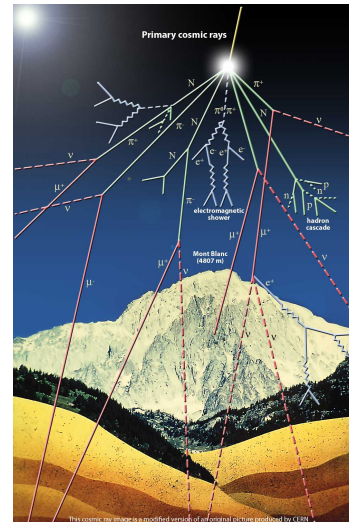
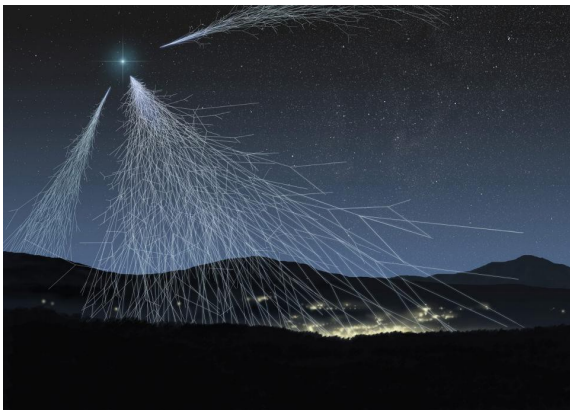
Experimentalmente los rayos-X se hacen incidir sobre una muestra de Carbono; los electrones se encuentran en la nube electrónica del átomo.



Los electrones que se encuentran en las capas exteriores serán poco ligados o casi libres, para ellos nuestra cuenta aplica bien. Para los electrones de las capas interiores la energía de ligadura es mayor, lo que se traduce en una masa mayor (es como querer mover todo el átomo de Carbono). Si aumenta la masa, de (13) el cambio de longitud se reduce, por eso es que es bastante probable ver a la salida fotones con la longitud original, lo que se traduce en el primer pico. El segundo pico se debe al efecto Compton. El resto de los puntos se relacionan con el hecho de que electrones no se encuentran exactamente en reposo; hay cierto movimiento térmico.

Muones cósmicos

Cuando partículas muy (pero muy) energéticas provenientes del espacio exterior colisionan con átomos en la alta atmósfera, la partícula original se desintegra o ‘decae’ en una cascada o lluvia de partículas. Estas partículas (en su mayoría piones) vuelven a decaer en muones (el primo gordo del electrón) en la baja atmósfera. Como el muón es más masivo que el electrón, y masa es energía, el muón puede decaer en un electrón y dos neutrinos (partículas casi sin masa). Este decaimiento $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ tiene una vida media medida de $T = 2 \mu\text{s}$. A pesar de su vida media, los muones logran llegar a la superficie terrestre antes de decaer, lo que se mide en observatorios como el Pierre Auger.



Sin embargo, rápidamente aparece una contradicción. La distancia entre la atmósfera baja y la superficie terrestre es de aproximadamente 10 km. Si los muones viajan digamos a una velocidad $v = 0,9999c$, entonces la distancia recorrida sería

$$\Delta X = v \times \Delta T = 0,9999c \times 2 \mu\text{s} \simeq 0,6 \text{ km} \quad (19)$$

Entonces nunca llegan a la Tierra. Pero experimentalmente sí lo hacen! ¿Qué está mal?

El asunto está en que, como se mueven tan rápido, los efectos relativistas se vuelven importantes. La respuesta anterior mezcla sistemas de referencia (SR):

- *Vida media:* $\tau = 2 \mu\text{s}$ – tiempo propio en el SR del muón S’
- *Ancho atmosférico:* $L_0 = 16 \text{ km}$ – distancia propia en el SR de la Tierra S

Podemos hacer la cuenta en cualquiera de los dos SR; lo que no podemos es mezclarlos.



SR DE LA TIERRA – DILATACIÓN DEL TIEMPO

En el sistema de la Tierra los muones recorren la longitud $L_0 = 10$ km, pero lo hacen en un tiempo distinto a τ debido a la dilatación del tiempo

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma \tau = 141 \mu s \Rightarrow \Delta x = v \times \Delta t \simeq 42 \text{ km} \quad (20)$$

En el sistema S los muones tienen más tiempo (70 veces más) para recorrer la atmósfera. Dado que $42 \text{ km} > 10 \text{ km}$, alcanzan el suelo.

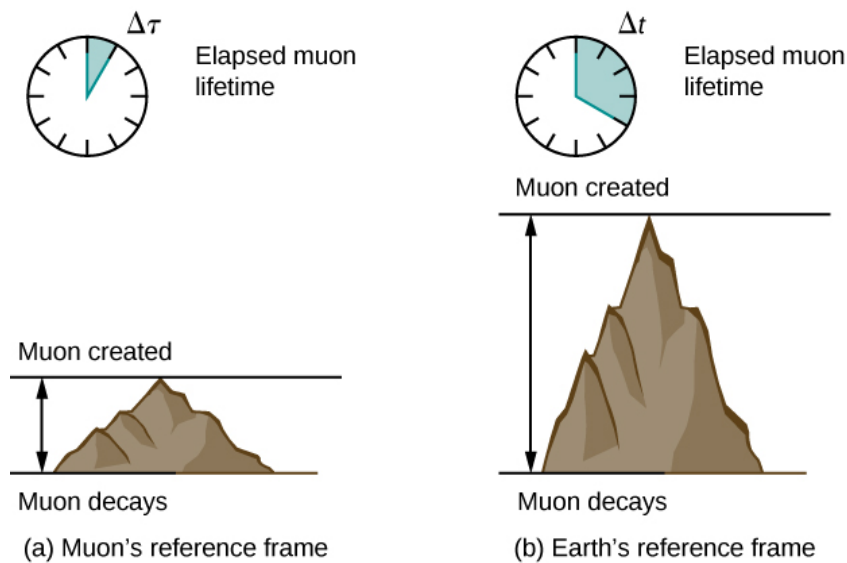


SR DEL MUÓN – CONTRACCIÓN DE LONGITUD

En el sistema del muón la tierra se acerca con velocidad en módulo $v = 0,9999c$ (es negativa en dirección), por lo que pueden recorrer una distancia de $0,6$ km como vimos antes. Lo que cambia es que en este sistema la longitud de la atmósfera está contraída

$$\Delta x' = v \times \Delta t' = v \times \tau \simeq 0,6 \text{ km} \quad \text{pero} \quad L = \frac{L_0}{\gamma} \simeq 0,14 \text{ km} \quad (21)$$

En S' la reducción del tiempo que los muones tienen antes de decaer se compensa con la contracción de la longitud que deben recorrer (de 70 veces menos). Como $0,6 \text{ km} > 0,14 \text{ km}$, alcanzan el suelo.



Les dejo como tarea interpretar este resultado en términos de diagramas de Minkowski.