

Hola

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Queremos una transformación F que nos lleve de unas coordenadas generalizadas q, p a otras Q, P :

$$\left\{ \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right. \xrightarrow{F} \left\{ \dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_k} \right.$$

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Queremos una transformación F que nos lleve de unas coordenadas generalizadas q, p a otras Q, P :

$$\left\{ \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right\} \xrightarrow{F} \left\{ \dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_k} \right\}$$

Para encontrar esta transformación, partimos de la acción

$$S[q(t), p(t)] = \int \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{H} dt$$

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Queremos una transformación F que nos lleve de unas coordenadas generalizadas q, p a otras Q, P :

$$\left\{ \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right. \xrightarrow{F} \left. \left\{ \dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_k} \right. \right.$$

Para encontrar esta transformación, partimos de la acción

$$S[q(t), p(t)] = \int \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{H} dt \equiv S[Q(t), P(t)] = \int \sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{K} dt$$

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Queremos una transformación F que nos lleve de unas coordenadas generalizadas q, p a otras Q, P :

$$\left\{ \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right\} \xrightarrow{F} \left\{ \dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_k} \right\}$$

Para encontrar esta transformación, partimos de la acción

$$S[q(t), p(t)] = \int \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{H} dt \equiv S[Q(t), P(t)] = \int \sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{K} dt$$

El integrando está definido a menos de una derivada total del tiempo, por lo que vale

$$\sum_k p_k \frac{dq_k}{dt} - \mathcal{H}(q, p) = \sum_k P_k \frac{dQ_k}{dt} - \mathcal{K}(Q, P) + \frac{dF}{dt}$$

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Queremos una transformación F que nos lleve de unas coordenadas generalizadas q, p a otras Q, P :

$$\left\{ \dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right\} \xrightarrow{F} \left\{ \dot{Q}_k = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_k}, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_k} \right\}$$

Para encontrar esta transformación, partimos de la acción

$$S[q(t), p(t)] = \int \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathcal{H} dt \equiv S[Q(t), P(t)] = \int \sum_k P_k \dot{Q}_k - \mathcal{K} dt$$

El integrando está definido a menos de una derivada total del tiempo, por lo que vale

$$\sum_k p_k \frac{dq_k}{dt} - \mathcal{H}(q, p) = \sum_k P_k \frac{dQ_k}{dt} - \mathcal{K}(Q, P) + \frac{dF}{dt}$$

y multiplicando por dt :

$$\sum_k p_k dq_k - \mathcal{H}(q, p) dt = \sum_k P_k dQ_k - \mathcal{K}(Q, P) dt + dF$$

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Despejando el diferencial de F obtenemos

$$dF = \sum_k p_k dq_k - \sum_k P_k dQ_k + (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt$$

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Despejando el diferencial de F obtenemos

$$dF = \sum_k p_k dq_k - \sum_k P_k dQ_k + (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt$$

y como dF es una diferencial exacto, entonces debe ser

$$F(q, Q, t) \quad \text{tal que} \quad p_k = \frac{\partial F}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$$

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Despejando el diferencial de F obtenemos

$$dF = \sum_k p_k dq_k - \sum_k P_k dQ_k + (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt$$

y como dF es una diferencial exacto, entonces debe ser

$$F_1(q, Q, t) \quad \text{tal que} \quad p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$$

Generatriz de tipo 1

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Despejando el diferencial de F obtenemos

$$dF = \sum_k p_k dq_k - \sum_k P_k dQ_k + (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt \quad [*]$$

y como dF es una diferencial exacto, entonces debe ser

$$F_1(q, Q, t) \quad \text{tal que} \quad p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$$

Generatriz de tipo 1

Si tomamos $PdQ = d(QP) - QdP$ en $[*]$, obtenemos

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Despejando el diferencial de F obtenemos

$$dF = \sum_k p_k dq_k - \sum_k P_k dQ_k + (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt \quad [*]$$

y como dF es una diferencial exacto, entonces debe ser

$F_1(q, Q, t)$ tal que $p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}$, $P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}$, $\frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$	Generatriz de tipo 1
---	-----------------------------

Si tomamos $PdQ = d(QP) - QdP$ en $[*]$, obtenemos

$$d\left(F + \sum_k Q_k P_k\right) = \sum_k p_k dq_k + \sum_k Q_k dP_k - (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt$$

TRANSFORMACIONES CANÓNICAS

Despejando el diferencial de F obtenemos

$$dF = \sum_k p_k dq_k - \sum_k P_k dQ_k + (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt \quad [*]$$

y como dF es una diferencial exacto, entonces debe ser

$F_1(q, Q, t)$ tal que $p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}$, $P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}$, $\frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$	Generatriz de tipo 1
---	-----------------------------

Si tomamos $PdQ = d(QP) - QdP$ en $[*]$, obtenemos

$$d\left(F + \sum_k Q_k P_k\right) = \sum_k p_k dq_k + \sum_k Q_k dP_k - (\mathcal{K} - \mathcal{H}) dt$$

lo que implica

$F_2(q, P, t)$ tal que $p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}$, $Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}$, $\frac{\partial F_2}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$	Generatriz de tipo 2
--	-----------------------------

FUNCIÓNES GENERATRICES

Generatriz de tipo 1 $F_1(q, Q, t) :$ $p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$

Generatriz de tipo 2 $F_2(q, P, t) :$ $p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$

Generatriz de tipo 3 $F_3(p, Q, t) :$ $q_k = -\frac{\partial F_3}{\partial p_k}, \quad P_k = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_k}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$

Generatriz de tipo 4 $F_4(p, P, t) :$ $q_k = -\frac{\partial F_4}{\partial p_k}, \quad Q_k = \frac{\partial F_4}{\partial P_k}, \quad \frac{\partial F_4}{\partial t} = \mathcal{K} - \mathcal{H}$

RELACIONES DIRECTAS (P8A)

$$F_1(q, Q, t) \longrightarrow \left. \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} \right|_{q, Q} = - \left. \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right|_{q, Q}$$

$$F_2(q, P, t) \longrightarrow \left. \frac{\partial p_i}{\partial P_j} \right|_{q, P} = \left. \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \right|_{q, P}$$

$$F_3(p, Q, t) \longrightarrow \left. \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \right|_{p, Q} = \left. \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right|_{p, Q}$$

$$F_4(p, P, t) \longrightarrow \left. \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \right|_{p, P} = - \left. \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} \right|_{p, P}$$

MOSTRAR QUE UNA TRANSF. ES CANÓNICA

Algunas de nuestras opciones son:

- Mostrar que existe alguna F_i que lleve $p, q \rightarrow P, Q$
- Mostrar que la matriz de transformación M_{ij} cumple la condición simpléctica
- Comprobar que los corchetes de Poisson dan lo que tienen que dar
- Comprobar que se cumplen las relaciones directas

Eso es todo