# Mecánica Clásica – 2do. Cuat. 2014 – Turno A

**Guía 7:** *Ecuaciones de Hamilton, transformaciones canónicas. Hamilton–Jacobi.*

**Problema 1:** Escriba el hamiltoniano y las ecuaciones de Hamilton para:
**a)** Un oscilador armónico tridimensional (no necesariamente isótropo). Use coordenadas cartesianas. Resuelva las ecuaciones.
**b)** Una partícula en un potencial central $U(r)$. Halle las constantes de movimiento. En el caso particular $U(r) = -k/r$, discuta las órbitas posibles.
**c)** Un trompo simétrico que se mueve libremente (sin gravedad). Ídem con un punto fijo, en el campo gravitatorio terrestre. En ambos casos, halle las constantes de movimiento.
**d)** Una máquina de Atwood, considerando los casos en que la polea, de radio $R$, carece de masa y tiene masa $M$.
**e)** Construya los diagramas de fases correspondientes.

**Problema 2:** Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para un oscilador armónico tridimensional isótropo en coordenadas *cilíndricas* y en coordenadas *esféricas*. Construya los correspondientes diagramas de fases.

**Problema 3:** Una partícula en un campo gravitatorio uniforme se mueve sobre la superficie de una esfera centrada en el origen. El radio de la esfera varía en el tiempo: $r = r(t)$, donde $r(t)$ es una función conocida. Obtenga el hamiltoniano y las ecuaciones canónicas. Discuta la conservación de la energía. ¿Es el hamiltoniano la energía total?.

**Problema 4:** Considere una partícula moviéndose en un plano bajo la influencia del potencial generalizado $V = (1/r)(1 + \dot{r}^2)$, donde $r$ es la distancia al origen. Encuentre los momentos generalizados $p_r$ y $p_\theta$ y $H$. Obtenga las ecuaciones canónicas y muestre que el impulso angular se conserva. ¿Se conserva $H$?. ¿Es $H = E$?. Reduzca el problema para $r$ a una ecuación diferencial de primer orden.

**Problema 5:** Escriba y resuelva las ecuaciones de Hamilton para una partícula cargada en un campo magnético uniforme y constante $\mathbf{B}$ en la dirección $\hat{\mathbf{z}}$, utilizando como potencial vector

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}.$$

**Problema 6:** Se tiene un sistema de dos masas puntuales $m_1$ y $m_2$ que interactúan con un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$. Muestre que su hamiltoniano puede escribirse como $H = H_{cm} + H_{rel}$

$$H_{cm} = \frac{P_{cm}^2}{2M} \qquad H_{rel} = \frac{p_{rel}^2}{2\mu} + V(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

donde $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida del sistema, $M = m_1 + m_2$, L es el momento angular total y $p_{rel}$ es el momento canónicamente conjugado de r.

**Problema 7:** Demuestre que la transformación siguiente es canónica

$$x = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\text{sen}q_1 + p_2), \qquad p_x = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 - q_2),$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2p_1}\cos q_1 + q_2), \qquad p_y = \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2p_1}\text{sen}q_1 + p_2),$$

donde $\omega = qB/mc$. Úsela para encontrar una solución alternativa del Problema 5.

**Problema 8:** Considere los siguientes puntos:
**a)** Pruebe que si se hace una transformación canónica de $(q, p)$ a $(Q, P)$ se tiene:

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}; \qquad \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i};$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}; \qquad \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}.$$

**b)** Considere un oscilador unidimensional de hamiltoniano $H = p^2/2m + (k/2)q^2$. Muestre que la transformación

$$Q = \ln\left(\frac{\text{sen}p}{q}\right), \qquad P = q\cot p$$

es canónica, y determine las funciones generatrices $F_1(q, Q)$ y $F_2(q, P)$.

**Problema 9:** Considere un oscilador bidimensional con hamiltoniano

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Muestre que la transformación que sigue es canónica y halle el nuevo hamiltoniano $H'(P, Q)$ y las correspondientes ecuaciones de Hamilton

$$x = X\cos\lambda + \frac{P_y\text{sen}\lambda}{m\omega} \qquad p_x = -m\omega Y\text{sen}\lambda + P_x\cos\lambda$$

$$y = Y\cos\lambda + \frac{P_x\text{sen}\lambda}{m\omega} \qquad p_y = -m\omega X\text{sen}\lambda + P_y\cos\lambda$$

Describa además el movimiento del oscilador bidimensional cuando $y = p_y = 0$ en $t = 0$.

**Problema 10:** Analizar los siguientes puntos:
**a)** ¿Bajo qué condiciones pueden ser $H$ y $L^2$ simultáneamente variables canónicas?. Ídem para $H$ y $L_z$.
**b)** ¿Pueden ser $L_x$ y $L_y$ simultáneamente variables canónicas?. Ídem para $L_x$ y $L^2$.
**c)** ¿Se modifica el elemento de volumen en el espacio de las fases en una transformación canónica?.

**Problema 11:** Demuestre la siguientes propiedades de los corchetes de Poisson, siendo $f, g, h$ funciones arbitrarias de $p_i$, $q_i$; $F(f)$ es una función de $f$ y $c$ es una constante.
**a)** $[f, c] = 0$; $[f, f] = 0$; $[f, g] + [g, f] = 0$; $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$; $[fg, h] = f[g, h] + [f, h]g$; $\frac{\partial}{\partial t}[f, g] = [\frac{\partial f}{\partial t}, g] + [f, \frac{\partial g}{\partial t}]$; $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$; $[f, F(f)] = 0$.
**b)** $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$; $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$; $[f, q_i] = -\frac{\partial f}{\partial p_i}$; $[f, p_i] = \frac{\partial f}{\partial q_i}$.
**c)** $[f, g^n] = ng^{n-1}[f, g]$; $[g, F(f)] = F'(f)[g, f]$.

**Problema 12:** Considere los siguientes puntos:
**a)** Muestre que si $f$ y $g$ son constantes de movimiento, también lo es $[f, g]$.
**b)** Calcule explícitamente, para una partícula, los corchetes de Poisson de las componentes cartesianas de $\mathbf{L}$ con las de $\mathbf{p}$ y las de $\mathbf{r}$. Además calcule $[L_x, L_y]$, $[L_y, L_z]$, $[L_x, L^2]$, donde $L^2 = |\mathbf{L}|^2$.

**Problema 13:** Considere los siguientes puntos:
**a)** Demuestre que $df/dt = [f, H] + \partial f/\partial t$. ¿Qué obtiene para $f = q_i$ ó $f = p_i$?. Si $f$ no depende explícitamente del tiempo, muestre que la condición necesaria y suficiente para que $f$ sea constante de movimiento es que $[f, H] = 0$.
**b)** Muestre que si una coordenada $q_i$ es cíclica, la transformación canónica de función generatriz $G = p_i$ es la transformación de simetría asociada al carácter cíclico de $q_i$. Observe que si $f$ es una constante de movimiento, la transformación canónica infinitesimal de generatriz $G = f$ deja invariante al Hamiltoniano. ¿Qué relación tiene esto con el teorema de Noether?.

**Problema 14:** Muestre que, para una partícula sometida a un potencial con simetría cilíndrica alrededor del eje $z$, $L_z$ es una constante de movimiento y que, si el potencial es central, entonces $\mathbf{L}$ es constante.

**Problema 15:** Considerar el sistema físico cuya energía cinética es $T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)(q_1^2 + q_2^2)$ y cuya energía potencial resulta $V = (q_1^2 + q_2^2)^{-1}$, donde $q_1$, $q_2$, $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ son coordenadas y velocidades generalizadas. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi para este sistema?. Resuelva esta ecuación para encontrar la función principal de Hamilton ($S$). Encuentre o deduzca de allí el comportamiento dinámico del sistema.

**Problema 16:** Una partícula de masa $m$ se mueve sobre el eje $x$ sometida a un potencial $V = a\sec^2(x/l)$, donde $a$ y $l$ son constantes. Resuelva la ecuación de H–J encontrando una expresión integral para $S$. Encuentre $x = x(t)$ utilizando $S$.

**Problema 17:** Considere un movimiento unidimensional de una partícula de masa $m$ sometida a una fuerza uniforme $F = at$ ($a =$ cte.) que aumenta linealmente con el tiempo. Encuentre el hamiltoniano del sistema. ¿Cuál es la ecuación de Hamilton–Jacobi?. Muestre que la función principal de Hamilton ($S$) puede escribirse como

$$S = \frac{1}{2}at^2x + \alpha x - \phi(t)$$

donde $\alpha$ es una constante y $\phi$ es una función del tiempo. Resuelva la ecuación para $\phi$. De allí encuentre la posición y el momento canónico conjugado en función del tiempo.

**Problema 18:** Para un oscilador armónico unidimensional:
**a)** Halle la trasformación canónica de función generatriz: $F_1(Q,q) = \lambda q^2 \cot Q$ eligiendo $\lambda$ para que el nuevo hamiltoniano sea $K(Q,P) = \omega P$ ($\omega$: pulsación del oscilador).
**b)** Muestre que $(Q,P)$ son variables de ángulo–acción. Halle el área encerrada por las curvas de $E$ (energía) constante en el espacio de fases, y muestre que la curva que corresponde a un $P$ dado encierra un área $2\pi P$.
**c)** Halle la función generatriz de tipo $F_2(P,q)$ que genera la misma transformación canónica $(q,p) \to (Q,P)$. ¿Qué relación hay entre $F_1$ y $F_2$?.

**Problema 19:** Demuestre que la función generatriz de la transformación canónica que lleva a variables de ángulo y acción es $F_2(q,J) = \int^q p(J,q')\,dq'$. Pruebe que esta función *no* es periódica como función de $q$, pero que $F_1(q,Q)$ *sí* lo es.

**Problema 20:** Considere el hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2m}(p_2 - kq_1)^2$$

y resuelva el problema utilizando:
**a)** La técnica de Hamilton–Jacobi. Encuentre la órbita general de la solución de la ecuación de H–J. ¿Qué sistema físico podría corresponder a este problema?.
**b)** Las ecuaciones canónicas.
**c)** Haciendo una transformación canónica con $Q_1 = Ap_1$, $P_1 = B(p_2 - kq_1)$, eligiendo $Q_2$ y $P_2$ convenientemente ($A$ y $B$ son constantes), resolviendo para $Q_i$ y $P_i$ y luego antitransformando.
**d)** Por medio de variables de ángulo–acción.

**Problema 21:** Considere un péndulo físico constituido por una barra de longitud $l$, que puede moverse en un plano vertical, con uno de sus extremos fijo (la barra gira libremente a su alrededor). El momento de inercia de la barra respecto al punto fijo es $I$. Hay gravedad.
**a)** Muestre que el hamiltoniano del sistema es $H = \frac{1}{2}I(p_\psi^2 - 2\alpha^2 \cos\psi)$ donde $\psi$ es el ángulo de la barra con la vertical, $p_\psi$ su momento conjugado y $\alpha$ una constante a determinar.
**b)** Construya el correspondiente diagrama de fases; halle puntos de equilibrio y discuta su estabilidad; construya la curva separatriz correspondiente (halle su ecuación). Determine los movimientos de libración y rotación posibles y halle su período.
**c)** Muestre que el área encerrada por la separatriz es $16\alpha$. Deduzca que el máximo valor de la variable de acción para el movimiento de libración es $8\alpha/\pi$.

**Problema 22:** Una partícula de masa $m$ se mueve en el potencial

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\lambda^2(x+a)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}m\lambda^2(x-a)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

**a)** Plantee las ecuaciones de Hamilton, construya diagramas de fases, considerando especialmente las curvas de fases próximas al origen.
**b)** Muestre que el espacio de fases se divide en 3 regiones invariantes, en las cuales se definen

distintas variables de ángulo–acción. Halle las mismas en función de la energía $E$ en cada caso.

**Problema 23:** Escriba las variables de acción y ángulo para las rotaciones en un plano de una barra con un punto fijo, sometida a un potencial angular $V(\psi) = k|\psi|/\pi$ si $-\pi < \psi < \pi$ $(k > 0)$, $V(\psi)$ periódico $[V(\psi + 2\pi) = V(\psi)]$.

**Problema 24:** Considere una partícula con hamiltoniano $H = p^2/(2m) + V(q)$, para cada uno de los siguientes casos: i) $V(q) = -k^2/q + l^2/2mq^2$ y ii) $V(q) = m\omega^2 q^2/2 + l^2/2mq^2$.
**a)** Dibuje los diagramas de fases, escriba las ecuaciones de las curvas separatrices e indique las regiones que corresponden a movimientos de libración y rotación.
**b)** Para los movimientos de libración exprese a la variable de acción como función de la energía y halle la relación $\psi = \psi(q, J)$ donde $\psi$ es la variable de ángulo. ¿Cómo es la frecuencia del movimiento?
**c)** Encuentre la energía de las trayectorias que satisfacen las relaciones $J = n\hbar$ y $l = p\hbar$ (con n,p números naturales y $\hbar =$ cte.). Discuta este punto con su docente.

**Problema 25:** Una partícula se mueve en el espacio bajo la acción de un potencial central $V(|\mathbf{r}|)$.
**a)** Calcule las variables de acción para la parte angular del movimiento. ¿Cómo se expresa el módulo del momento angular como función de las mismas?
**b)** ¿Bajo qué condiciones el movimiento de la partícula será periódico?. Demuestre explícitamente que para el problema de Kepler y para el escilador armónico el movimiento *es* periódico pero que para un potencial de la forma $V = a/r^2$ no lo es. Obtenga la frecuencia de movimiento como función de la energía.
**c)** ¿Cuál es la energía de las órbitas definidas por las relaciones $J_i = n_i\hbar$?. ¿Cuánto vale el momento angular de las mismas?. ($n_i$ entero y $\hbar =$ cte.).

**Problema 26:** Para el potencial $V(q) = \epsilon(1 - \alpha/q)^2$
**a)** Dibujar el diagrama de fases indicando las zonas de libración.
**b)** Calcular las variables de ángulo y acción $J = J(E)$ y $\psi = \psi(q, J)$.
**c)** ¿Qué pasa con el período del movimiento cuando la energía tiende al valor que corresponde a la curva separatriz?.