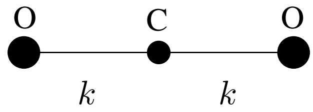
Mecánica Clásica - 2do. cuatrimestre de 2017

Guía 5: *Pequeñas oscilaciones*

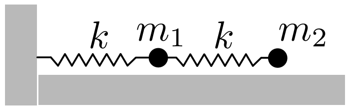
1. Obtener los modos normales de oscilación para la molécula de $\mathrm{CO_2}$, interpretando físicamente cada uno de ellos. Escriba la solución general. Hallar las coordenadas normales utilizando argumentos de simetría.



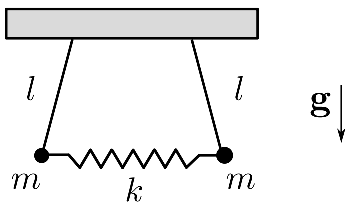
2. Para el sistema de la figura:

   (a) Determine la solución general del movimiento en un entorno de la posición de equilibrio (los resortes tienen longitud natural l_0).

   (b) *En el caso $m_1 = m_2$, considere para cada masa una fuerza de rozamiento proporcional a su velocidad.



3. Deducir las ecuaciones de movimiento de dos péndulos simples conectados por un resorte lineal sin masa, como se indica en la figura. Suponer que el movimiento ocurre en el plano del dibujo y calcular las frecuencias naturales de vibración para pequeños desplazamientos. Determinar a priori las coordenadas normales. Analizar el movimiento del sistema para la siguiente condición inicial: $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_0, \dot{\theta}_2(0) = 0, \theta_1(0) = \theta_0, \theta_2(0) = 0$.



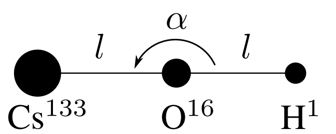
4. La molécula de CsOH es lineal en equilibrio. Cuando la molécula vibra aparecen tres tipos diferentes de interacciones.

   i) Una interacción entre el átomo de cesio y el de oxígeno, dada por un potencial de Lennard−Jones, $V_{\mathrm{CsO}} = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$, donde ϵ y σ son constantes y r es la distancia entre los dos átomos.

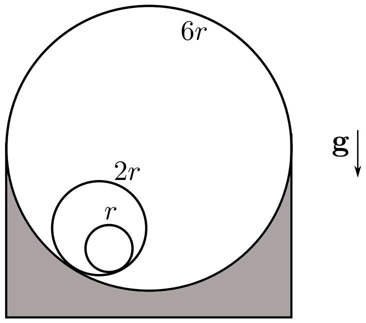
   ii) Una interacción análoga entre el par de átomos O−H, pero 15 veces más débil.

   iii) Una interacción elástica de curvatura entre las uniones Cs−O y O−H, con un potencial $V = \frac{1}{2}kl^2(\pi - \alpha)^2$.

   Hallar: el lagrangiano de la molécula, las frecuencias características de oscilación y los modos normales correspondientes. Dibujarlos y explicar en detalle los movimientos de la molécula para cada uno. *Sugerencia:* compare los pesos atómicos.

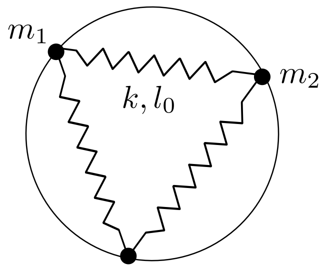


5. Halle las frecuencias propias, modos y coordenadas normales de un sistema que consta de dos cilindros huecos de masa m y radios r y $2r$, respectivamente, que están colocados uno dentro del otro y que ruedan dentro de una superficie cilíndrica fija de radio $6r$. No hay deslizamiento.

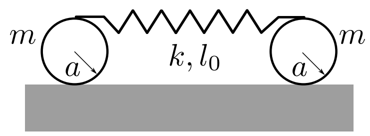


6. Determinar las frecuencias de oscilación de un sistema de dos osciladores unidimensionales idénticos, de frecuencia ω, acoplados por una interacción $V(x_1, x_2) = -ax_1x_2$.

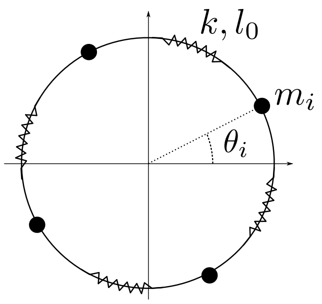
7. Dadas tres masas m_1, m_2, m_3, enhebradas en un anillo fijo de radio a, unidas por resortes de constante elástica k y longitud en reposo l_0, hallar el lagrangiano y determinar las frecuencias y modos normales de oscilación. Repetir el problema en el caso en que $m_1 = m_2$.



8. Hallar los modos y frecuencias propias para el sistema de la figura. No hay deslizamiento.



9. Sea un sistema formado por cuatro masas idénticas, enhebradas en un aro fijo de radio a y que interactúan a través de resortes de constante k y longitud natural l_0. Calcule las frecuencias y modos normales de oscilación. Obtenga las coordenadas normales. Si llama z_2 a la coordenada normal correspondiente a la frecuencia no nula y no degenerada, escriba la solución para las siguientes condiciones iniciales: $z_1 = z_3 = z_4 = 0$, $z_2 = b$, $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = \dot{z}_4 = 0$ expresando el resultado en función de las coordenadas generalizadas originales θ_i.



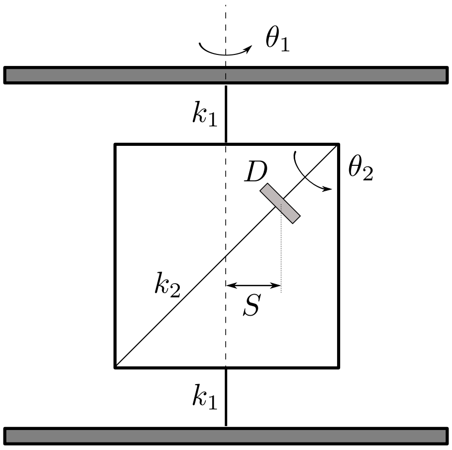
10. El marco cuadrado de la figura está sostenido por dos cuerdas tensas de constante de torsión k_1, sujetas a dos de sus lados. El disco D está sostenido en este marco por una cuerda de constante de torsión k_2, fija a dos vértices opuestos. Sea I el momento de inercia del marco; I_1 el momento de inercia del disco respecto de su eje; e I_2 el correspondiente a una dirección contenida en su propio plano. Suponga $I_1 + I_2 = 2I$ y $MS^2 = I$, donde M es la masa del disco. Sabiendo el torque producido por una cuerda para un ángulo de torsión θ respecto de la posición de equilibrio es de la forma $N = -k\theta$:

    (a) Escriba el lagrangiano del sistema.

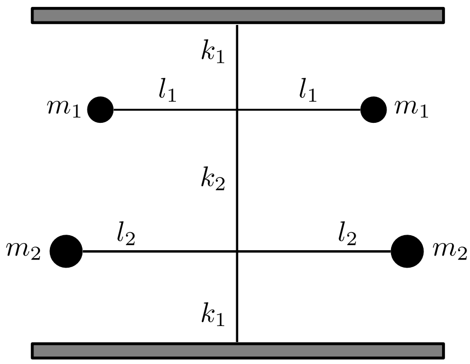
    (b) Halle las frecuencias normales de oscilación del sistema.

    (c) Halle las coordenadas normales.

    (d) Escriba la solución general del movimiento del sistema.



11. Se tiene un péndulo de torsión como indica la figura. Las masas están unidas por varillas rígidas de masa despreciable.



    (a) Escriba el lagrangiano del sistema en función de los ángulos de giro de las varillas.

    (b) Hallar las frecuencias propias de oscilación del sistema.

    (c) Hallar las coordenadas normales.

12. *Indique cuántas frecuencias nulas tiene una molécula no simétrica y describa los modos normales asociados.

13. *Indique cuántas frecuencias no nulas tiene una molécula no simétrica.

14. *Resuelva usando el formalismo de pequeñas oscilaciones algunos problemas de la Guía 2.