Vector Laplace-Runge-Lenz

Problema Deducir la conservación de $\vec{A} = \dot{\vec{q}} \times (\vec{q} \times \dot{\vec{q}}) - \frac{\vec{q}}{q}$ (no es potencial vector)

en el problema de Kepler escalado.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^2 + \frac{1}{q}$$

con $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$

en $\vec{q} = \lambda_1 \vec{r}$

basta elegir unidades de masa $\Rightarrow V = -\frac{K}{r} = -\frac{K\lambda_1}{q}$

$$T = \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} = \frac{m\,\dot{\vec{q}}^2}{2\lambda_1^2}$$

con: $\mathcal{L}' = T - V$

$$\mathcal{L}' = \lambda\left[\frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{q}\right]$$

con $\lambda = K\lambda_1 = \frac{m}{\lambda_1^2}$

podemos usar

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}^2 + \frac{1}{|\vec{q}|} \quad (1)$$

c.c. $\begin{cases} \lambda_1 = \left(\frac{m}{K}\right)^{1/3} \\ \lambda = (mK^2)^{1/3} \end{cases}$

pues da las mismas ecuaciones de movimiento,

$$\ddot{\vec{q}} = -\frac{\vec{q}}{q^3} \quad (2)$$

Consideremos los desplazamientos infinitesimales:

$$\delta q_i = \epsilon\left(\dot{q}_i q_k - \frac{1}{2} q_i \dot{q}_k - \frac{1}{2} \vec{q}\cdot\dot{\vec{q}}\, \delta_{ik}\right) \quad (3)$$

(uno para cada k, representan tres posibles casos)

$i = 1, 2, 3$, k fijo $= 1, 2, 3$

La variación en las velocidades es:

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\delta q_i$$

$$\delta \dot{q}_i = \epsilon\Big[\underbrace{\ddot{q}_i}_{-\frac{q_i}{q^3}} q_k + \dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{1}{2}\dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{1}{2} q_i \underbrace{\ddot{q}_k}_{-\frac{q_k}{q^3}} - \frac{1}{2}\dot{\vec{q}}\cdot\dot{\vec{q}}\,\delta_{ik} - \frac{1}{2}\vec{q}\cdot\underbrace{\ddot{\vec{q}}}_{-\frac{\vec{q}}{q^3}}\delta_{ik}\Big]$$

$$\delta \dot{q}_i = \frac{\epsilon}{2}\left(\dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{q_i q_k}{q^3} - \dot{\vec{q}}^2 \delta_{ik} + \frac{\delta_{ik}}{q}\right) \quad (4)$$

$$\delta L = \sum \dot{q}_i \delta \dot{q}_i + \sum_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{q}\right)}_{-\frac{1}{q^2}} \underbrace{\frac{\partial q}{\partial q_i}}_{\frac{q_i}{q}} \delta q_i$$

$$\delta L = \sum_i \left(\dot{q}_i \delta \dot{q}_i - \frac{q_i \delta q_i}{q^3}\right) \quad (5) \quad k \text{ fijo}$$

$$\delta L = \frac{\epsilon}{2}\left[\sum_i \left(\cancel{\dot{q}_i^2 \dot{q}_k} - \frac{\dot{q}_i q_i q_k}{q^3}\right) - \cancel{\dot{\vec{q}}^2 \dot{q}_k} + \cancel{\frac{\dot{q}_k}{q}}\right]$$

$$- \frac{\epsilon}{q^3}\left[\sum_i \left(q_i \dot{q}_i q_k - \cancel{\frac{1}{2} q_i^2 \dot{q}_k}\right) - \frac{1}{2}\frac{\vec{q}\cdot\dot{\vec{q}}\, q_k}{q^3}\right]$$

$$\therefore \quad \delta L = \epsilon\left[\frac{\dot q_k}{q} - \frac{\vec q\cdot\dot{\vec q}}{q^3}\, q_k\right] = \epsilon \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{q_k}{q}}_{g}\Big)$$

Se conserva:

$$\sum_i p_i f_i - g = A_k$$

Componente k del Runge-Lenz.

$$A_k = \dot q^2 q_k - \vec q\cdot\dot{\vec q}\,\dot q_k - \frac{q_k}{q}$$

o en forma vectorial:

$$\vec A = \dot{\vec q} \times \underbrace{(\vec q \times \dot{\vec q})}_{\vec L} - \frac{\vec q}{q} = cte.$$

Siempre apunta a

$$\vec A = \vec p \times (\vec r \times \vec p) - mk\frac{\vec r}{r}$$

apunta al perihelio (punto más cercano de la órbita) $\Rightarrow$ Las órbitas no precesionan.