Mecánica Clásica – 2do. cuatrimestre de 2012 – Primer parcial (1/10/2012)

P1. (2.5 puntos) Dos partículas de masas m_1 y m_2 se mueven en un plano inclinado en un ángulo α con respecto a la vertical. Ambas masas están unidas por un resorte de constante elásica k y longitud natural l_0, como indica la figura (hay gravedad).

a) Escriba el Lagrangiano y una de las ecuaciones de Lagrange.

b) Encuentre las transfomaciones infinitesimales que dejan invariante el Lagrangiano o la acción. Usando el Teorema de Nöether y halle las magnitudes conservadas.

c) Si ahora se fija $\alpha = \pi/2$, ¿qué otras magnitudes se conservan?. Justifique.

P2. (1.5 puntos) Una partícula de masa m está sujeta a un campo uniforme que varía con el tiempo de modo que su Lagrangiano está dado por: $\mathcal{L} = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \alpha \sin(\omega t)x$. Suponga que se sabe experimentalmente que la partícula parte de $x = 0$ a un tiempo $t = 0$ y vuelve al mismo punto al cabo de un tiempo $\tau = \frac{\pi}{\omega}$.

a) Usando la funcional $x = at^2 + bt + c$, encuentre una solución aproximada de la ecuación de movimiento usando el Principio variacional de Hamilton (halle a, b y c).

b) Plantee y resuelva en forma exacta la ecuación de movimiento usando las condiciones del problema.

c) Verifique la solución aproximada hallada en a) comparando el resultado exacto con el aproximado para la velocidad inicial y la máxima distancia de alejamiento. Haga un dibujo esquematico de la trayectoria en ambos casos.

Ayuda: $\int t\sin(\omega t)dt = -\frac{t\cos(\omega t)}{\omega} + \frac{\sin(\omega t)}{\omega^2}$, $\qquad \int t^2 \sin(\omega t)dt = -\frac{(-2+\omega^2 t^2)\cos(\omega t)}{\omega^3} + \frac{2t\sin(\omega t)}{\omega^2}$.

P3. (3 puntos) Una partícula de masa m y momento angular l se mueve sujeto a una fuerza central $F(r) = -(k/r^2)\exp(-r/a)$, con k y a positivas.

a) Encuentre la ecuación que debe satisfacer el(los) radio(s) r_0 en una órbita circular.

b) Muestre que la órbita circular es estable sólo si $r_0 < a$ (considere que la ecuación obtenida en a) posee solución).

c) Considere una órbita cercana a la órbita circular, en el caso que $r_0 << a$. Definido el perihelio como el punto de mínimo acercamiento $r = r_0 - \delta r$. Muestre que sobre un ciclo radial de la órbita, el ángulo polar del perihelio avanza en $\pi r_0/a$. Desprecie variaciones en $\dot{\theta}$ de su valor constante de órbita circular.

P4. (3 puntos) El sistema de la figura está formado por tres masas, dos laterales m y una masa central M. Las masas se encuentran enhebradas en un aro vertical de radio a, y están unidas como indica la figura mediante dos resortes (enhebrados) de constante k y longitud natural l_0.

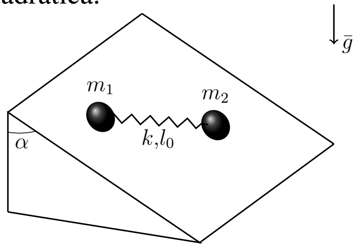
a) Elija un conjunto de coordenadas generalizadas y escriba el Lagrangiano.

b) Si se miden los ángulos θ desde el centro del aro y con respecto a la vertical, ¿Cuanto vale θ_{20} de equilibrio? Calcule la constante k en función de los datos, para que la posición de equilibrio sea $\theta_{10} = \pi/2$ y $\theta_{30} = -\pi/2$.

c) Escriba el Lagrangiano en la aproximación de pequeñas oscilaciones en un entorno de la configuración de equilibrio estable.

d) Encuentre las frecuencias y los modos normales de oscilación y grafique cualitativamente el movimiento del sistema correspondiente a cada modo. *Ayuda* Puede usar simetrías y dejar expresadas dos soluciones en función de las raices ed una ecuación cuadrática.

P1



P4